



Gravité des systèmes verticalement homogènes : applications aux disques astrophysiques

Audrey Trova

► To cite this version:

Audrey Trova. Gravité des systèmes verticalement homogènes : applications aux disques astrophysiques. Autre. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. Français. NNT : 2013BOR14902 . tel-00955555

HAL Id: tel-00955555

<https://theses.hal.science/tel-00955555>

Submitted on 4 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 4902

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX 1**

École Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de BORDEAUX 1

Discipline : ASTROPHYSIQUE

Présentée et soutenue par
Audrey Trova

**Gravité des systèmes verticalement homogènes : Applications
aux disques astrophysiques**

Soutenue le 14 Novembre 2013

| | | |
|-----------------|--------------------------|-------------|
| Après avis de : | D. Pfenniger, Professeur | Rapporteurs |
| | W. Kley, Professeur | |

Devant le jury composé de :

A. Dutrey, Directrice de recherche, Université de Bordeaux 1, LAB, Examinatrice
F. Hersant, Chargé de recherche, Université de Bordeaux 1, LAB, Directeur de thèse
J-M. Huré, Professeur, Université de Bordeaux 1, LAB, Directeur de thèse
W. Kley, Professeur, Université de Tübingen, Tübingen, Rapporteur
D. Pfenniger, Professeur, Université de Genève, Observatoire de Genève, Rapporteur
M. Rieutord, Professeur, Université Paul Sabatier, IRAP, Président du jury

Thèse préparée à l'Observatoire Aquitain des Sciences de l'Univers
Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux
(OASU, UMR 5804-LAB)

Tempora mori, tempora mundis recorda. Voilà. Et bien ça, par exemple, ça veut absolument rien dire, mais l'effet reste le même.

François Rollin "Le roi Loth", *Kaamelott, Livre III, L'Assemblée des rois 1e partie*, écrit par Alexandre Astier.

C'est avoir tort que d'avoir raison trop tôt.
Mémoires d'Hadrien, Marguerite Yourcenar

Résumé

La gravitation joue un rôle important dans de nombreux domaines de l'astrophysique : elle assure notamment la cohésion et la stabilité des planètes, des étoiles et des disques. Elle est aussi motrice dans le processus d'effondrement de structure et conduit, dès lors qu'un moment cinétique initial est significatif, à la formation d'un disque.

Ma thèse est consacrée à l'étude des disques de gaz, et plus particulièrement à la description du potentiel et du champ de gravité qu'ils génèrent dans l'espace et sur eux-mêmes (l'auto-gravitation). Bien que la force de Newton soit connue depuis longtemps, la détermination des interactions auto-gravitantes reste difficile, en particulier lorsque l'on s'écarte significativement de la sphéricité. La principale difficulté tient dans la divergence hyperbolique du Noyau de Green $1/(r'-r)$ et nécessite un traitement propre. L'approche théorique est intéressante car elle fournit de nouveaux outils (techniques numériques, formules approchées, etc...) qui peuvent aider à produire des solutions de référence et à améliorer les simulations numériques.

Dans une première partie, nous introduisons le sujet, les notions et les bases essentielles. Le chapitre 1 est consacré à une présentation succincte du contexte scientifique et aux motivations de notre travail. Dans le chapitre 2, nous reproduisons dans ces grandes lignes le cheminement conduisant au développement multipolaire, à partir de l'équation de Poisson et de la formule intégrale de Newton. Il s'agit de l'une des méthodes les plus classiques permettant d'obtenir le potentiel gravitationnel d'un corps. Les deux systèmes de coordonnées les plus utilisées sont mis en avant : sphériques et cylindriques. A travers quelques exemples, nous montrons les limites de cette approche, en particulier dans le cas de l'auto-gravité des disques.

Dans une deuxième partie, nous abordons le vif du sujet. Le chapitre 3 présente l'approche basée sur les intégrales elliptiques que nous retrouverons dans l'ensemble du manuscrit (cas général d'abord, puis cas axi-symétrique). Dans le chapitre 4, nous établissons un premier résultat concernant le noyau de Green dans des systèmes axi-symétriques et verticalement homogènes : une forme alternative et régulière du noyau, quelque soit le point de l'espace. Nous avons exploité cette nouvelle formule pour déduire une bonne approximation du potentiel des disques géométriquement minces, des anneaux et des systèmes faiblement étendus en rayon. Ceci fait l'objet du chapitre 5.

Dans une troisième partie, nous étudions les effets de bords sur la composante verticale du champ de gravité, g_z , causés par un disque mince axi-symétrique. Le chapitre 6 est dédié à l'approximation de Paczynski (Paczynski, 1978a), qui permet traditionnellement d'exprimer le champ comme une fonction linéaire de la densité de surface locale. Cette approximation n'est en fait strictement valide que dans le cas du modèle du "plan infini", loin d'un disque réaliste. Près du bord externe des disques où la gravité décroît, l'approximation de Paczynski s'avère assez imprécise (facteur 2 typiquement), et ne donne

pas de bons résultats et doit être corrigée. Toujours dans l'hypothèse d'une homogénéité verticale de la densité, nous avons construit une expression pour g_z qui tient compte de ces effets de bords. Le chapitre 7 est consacré à ce résultat.

Dans une dernière partie, nous relâchons l'hypothèse de symétrie axiale (le disque est discrétisé en cellules cylindriques homogènes). Nous nous sommes inspirés du travail d'Ansorg *et al.* (2003) afin d'exprimer, via le théorème de Green, le potentiel d'une cellule cylindrique homogène par une intégrale de contour. Ce résultat s'applique directement aux simulations de disques, où ceux-ci sont découpés en cellules cylindriques, chacune ayant sa propre densité.

Une conclusion et quelques perspectives sont données en fin de manuscrit.

Mots clefs :

Auto-gravité

Disque

Méthode analytique

Abstract

Gravitation plays an important role in many fields in astrophysics : it appears in the cohesion and stability of bodies such as planets, stars, disks and galaxies. In the Universe, the formation of most astrophysical objects involves disk-like configurations by a main process : the gravitational collapse. The structure and the evolution of these disks (protoplanetary disks, circumplanetary disks...), are an important stage in the process of the formation of stars, planets or satellites. It is therefore fundamental to understand their physics and develop appropriate tools. I devoted my Ph.D. to the computation of the gravitational potential and field of astrophysical disks. Although Newton's force is known for long, the determination of self-gravitating interactions inside bodies remains a difficult task. Strong deviations to sphericity require more efforts. The main difficulty is to manage properly the hyperbolic divergence of the Green kernel $\frac{1}{|r-r'|}$. In this purpose, the theoretical approach is interesting as it can provide powerful formulae and new tools, which can also help to produce reference solutions. So, I have investigated new methods able to treat this question as rigorously as possible.

In a first part, chapter 1 is devoted to the scientific context and motivations. In the chapter 2 we derive the well known multipole expansion in spherical and cylindrical coordinates from the Poisson equation and Newton's equation. We show the limits of these two developments in the context of astrophysical disks. In chapter 3, we discuss the formalism based on elliptic integrals, its advantages and drawbacks, and we describe two methods which use this approach in the special case of axisymmetrical disks.

In the second part, chapter 4 is about the discovery of an alternate formula for the Green kernel, which involves regular function. To obtain this result, we assume that the disk is vertically homogeneous (i.e., the density varies only with the radius), and that it is axially symmetric. In chapter 5, by using this new expression, we build an approximation for the potential in the special case of geometrically thin disks and rings, and another one for systems which are radially confined.

In the third part, chapter 6 is devoted to the study of edge effects on the vertical component of the gravitational field caused by a thin disk. According to Paczynski's approximation, the field is a linear function of the surface density Paczynski (1978a). This approximation is strictly valid only in the infinite slab model, while we are interested in a realistic disk. Close to the outer edges, where gravity decreases, Paczynski's approximation fails and must be corrected. By assuming again a density varying with the radius only, we have derived a new expression for the vertical component of gravitational field, which properly accounts of the presence of the edge of the disk. This is the main subject of the chapter 7.

In the last part (chapter 8), we generalize the work by Ansorg *et al.* (2003), valid under axial symmetry only. Using a similar approach, we built an expression for the

self-gravitating potential of cylindrical cells, which is not known in closed form yet. This expression is made of a single integral over the boundary of the cell. This result can be applied in hydrodynamical simulations, where disks are usually discretised into homogeneous cylindrical cells, each cell having its own density.

A conclusion and a few perspectives end the thesis.

Keyword :

Self-gravity

Disks

Analytic method

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Jean-Marc et Franck pour m'avoir épauler et supporter durant ces 3 années. Ils m'ont permis de découvrir ce monde de la recherche et surtout l'envie d'en faire partie. Nos nombreux échanges scientifiques m'ont beaucoup appris. J'espère un jour qu'un de mes étudiants pensera la même chose de moi, ce qui si c'est le cas, sera en grande partie grâce à eux.

Je tiens à remercier également Géraldine, ma marraine de thèse qui a su me prodiguer des conseils avisés tout au long de ces trois années. Ces encouragements au cours des derniers mois m'ont beaucoup aidé.

Merci aussi à tout le laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux pour m'avoir aussi bien accueillie, ce qui m'a permis de travailler dans de bonnes dispositions. Une mention spéciale à tous les doctorants et les post-doctorants, il serait trop long de tous les citer, pour les nombreux moments passés en leur compagnie (Futsal, Bowling, pub, Astrojeux, Astrociné etc...)

Une merci particulier à Emeline pour avoir partager avec moi, depuis notre stage de master, nos années au laboratoire. Je n'oublierais pas nos balades et discussions dans le parc du laboratoire. Je remercie également Christophe pour son aide précieuse pour le debuggage de mon code ainsi que pour son aide en \LaTeX et pour avoir également partagé ces trois ans. Et puis Melissa, une amie, qui a relu ma thèse afin d'y corriger les innombrables fautes d'orthographe. Merci pour ta patience. Et bien sûr, tout mes amis pour leur soutien également.

Merci beaucoup à mes parents (et ma famille) pour ce soutien sans faille qu'ils m'ont accordé. Je n'y serais sans aucun doute jamais arrivée sans leur aide et leurs encouragements tout au long de ma scolarité, et ceci malgré quelques changements de cap !

Pour finir, je remercie mon compagnon Mickaël, qui m'a supporté lors de cette dernière année difficile par moment. Son soutien et ses encouragements m'ont permis de ne pas abandonner.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Page de garde | i |
| Résumé | 1 |
| Abstract | 3 |
| Remerciements | 5 |
| Sommaire | 10 |
| Introduction | 13 |
| 1 Contexte scientifique et motivations | 13 |
| I Les disques en astrophysique | 13 |
| II Le modèle standard des disques minces | 14 |
| 1 Structure verticale : équilibre hydrostatique | 14 |
| III L’auto-gravité dans les disques | 15 |
| 1 La force de Gravitation d’un objet étendu | 15 |
| 2 L’équation de Poisson | 16 |
| IV Contenu de la thèse | 17 |
| 2 Développement multipolaire : synthèse et limites | 19 |
| I Système de coordonnées sphériques | 20 |
| 1 Accès au développement multipolaire depuis l’équation de Poisson . | 20 |
| 2 Accès au développement multipolaire à partir de l’intégrale généralisée de Newton | 26 |
| 3 Application : hypothèse de symétrie | 29 |
| II Système de coordonnées cylindriques | 30 |
| 1 Solution à variables séparables de l’équation de Poisson | 30 |
| 2 Application au disque inhomogène | 32 |
| III Applications et limites des développements en série dans le cas des disques | 34 |
| 1 Trois exemples sous symétrie axiale | 34 |
| 2 Effet de la troncature sur les modèles d’étoiles polytropiques | 36 |
| 3 Conclusion | 39 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| I | Potentiel de disques axi-symétriques : régularisation de la fonction de Green et application | 41 |
| 3 | Approche par les intégrales elliptiques | 43 |
| I | Introduction et motivations | 43 |
| 1 | Formule générale | 44 |
| 2 | Cas axi-symétrique | 45 |
| II | Travaux de Bannikova <i>et al.</i> (2011) | 48 |
| 1 | Potentiel gravitationnel externe | 49 |
| 2 | Potentiel gravitationnel interne | 50 |
| 3 | Conclusion | 52 |
| III | Méthode de "double splitting" : travaux de Huré (2005) | 52 |
| 4 | Régularisation de la fonction de Green axi-symétrique | 55 |
| I | Régularisation du noyau de Green axi-symétrique par intégration analytique | 56 |
| 1 | Hypothèse d'homogénéité verticale de la densité | 56 |
| 2 | Contournement de la singularité | 57 |
| 3 | Nouvelle formulation pour la fonction de Green axi-symétrique moyenne (GAM) | 59 |
| 4 | Analyse numérique des deux composantes de la fonction GAM . . . | 60 |
| 5 | Expression et comportement à longue distance du potentiel gravitationnel de systèmes axi-symétriques | 63 |
| II | Tests numériques | 65 |
| 1 | Étude de la fonction GAM | 65 |
| 2 | Analyse du potentiel gravitationnel exprimé via la fonction GAM . | 67 |
| III | Influence d'une stratification verticale | 71 |
| 1 | Effet sur la fonction GAM | 71 |
| 2 | Effet sur le potentiel gravitationnel | 72 |
| IV | Comparaison avec Bannikova <i>et al.</i> (2011) | 74 |
| 1 | Potentiel gravitationnel externe | 76 |
| 2 | Potentiel gravitationnel interne | 76 |
| V | Conclusion | 77 |
| 5 | Applications aux disques minces et aux anneaux | 81 |
| I | Approche linéaire. Application aux systèmes de faible extension radiale . . | 81 |
| 1 | Approximation par morceaux | 82 |
| 2 | Test | 84 |
| 3 | Vers une expression algébrique pour le tore circulaire ? | 84 |
| II | Cas des disques géométriquement minces et anneaux | 86 |
| 1 | Développement de Taylor de la fonction $k\mathbf{E}(k)$ | 86 |
| 2 | Expression approchée de la fonction GAM. Estimation de l'erreur . | 88 |
| 3 | Comportement à longue distance | 90 |
| 4 | Application numérique : comportement de \mathcal{G}_{app} vs \mathcal{G} | 91 |
| 5 | Sensibilité de Ψ_{app} à l'épaisseur du disque | 92 |
| III | Conclusion | 94 |

| | | |
|------------|--|------------|
| II | Effets de bords | 97 |
| 6 | Champ local vs champ global | 99 |
| I | Composante verticale du champ de gravité pour un disque verticalement homogène | 100 |
| 1 | Vers une approximation locale de g_Z ? | 100 |
| 2 | Estimation du terme $\int_a B(R, Z; a, z) da$ | 102 |
| II | Le plan infiniment étendu et l'approximation de "Paczynski" (Paczynski, 1978a) | 103 |
| 1 | Effet local du champ de gravité | 103 |
| 2 | Effet non local : concentration de la matière au bord interne | 107 |
| III | Conclusion | 108 |
| 7 | Extension de l'approximation de Paczynski | 109 |
| I | Correction au 1er ordre | 109 |
| 1 | Ajustement de la fonction $k\mathbf{K}(k)$ par une fonction de 3 termes . . . | 110 |
| 2 | Approximation de g_Z | 110 |
| 3 | Application aux disques géométriquement minces | 111 |
| 4 | Amplitude de w_1 et de w_2 | 113 |
| 5 | Test numérique de g_Z | 113 |
| II | Sensibilité de notre expression approchée à l'épaisseur du disque | 113 |
| III | Une forme fermée pour le champ au premier ordre | 117 |
| IV | Conclusion | 118 |
| III | Mailles cylindriques, intégrale de contour et solution de référence | 121 |
| 8 | Potentiel de cellules cylindriques homogènes | 123 |
| I | Théorème de Green. Cas axi-symétrique homogène | 125 |
| II | Relaxation de l'hypothèse de symétrie axiale | 127 |
| III | Comportement des M et N's | 131 |
| IV | Potentiel d'auto-gravitation d'une cellule cylindrique | 131 |
| V | Conclusion | 137 |
| | Conclusions et Perspectives | 141 |
| | Bibliographie | 148 |
| | Annexes | 151 |
| A | Intégrales elliptiques complètes et incomplètes | 151 |
| I | Définitions des fonctions | 151 |
| II | Règles d'utilisation | 152 |
| III | Dérivées des intégrales complètes | 153 |

| | | |
|----------|--|------------|
| IV | Développements en série | 153 |
| 1 | Intégrales elliptiques incomplètes | 153 |
| 2 | Intégrales elliptiques complètes | 154 |
| V | Approximations polynomiales | 154 |
| B | Polynôme de Legendre et fonctions associées | 157 |
| I | Polynôme de Legendre | 157 |
| 1 | Équation différentielle de Legendre | 157 |
| 2 | Autres définitions | 158 |
| 3 | Quelques polynômes et leur représentation | 158 |
| 4 | Propriétés des polynômes | 158 |
| II | Fonctions associées de Legendre de première espèce | 158 |
| 1 | Équation différentielle | 158 |
| 2 | Lien entre les polynômes de Legendre et les fonctions associées . . . | 159 |
| 3 | Quelques propriétés | 159 |
| C | Fonctions de Bessel et transformée de Hankel | 161 |
| I | Fonctions de Bessel | 161 |
| 1 | Définition en série entière | 161 |
| 2 | Propriétés des $J_n(x)$ | 162 |
| II | Relation entre fonction de Bessel, fonction de Legendre associée et intégrale elliptique | 162 |
| III | Transformée de Hankel | 163 |
| D | Démonstration du résultat d'Ansorg <i>et al.</i> (2003) | 165 |

Introduction

Chapitre 1

Contexte scientifique et motivations

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| I | Les disques en astrophysique | 13 |
| II | Le modèle standard des disques minces | 14 |
| 1 | Structure verticale : équilibre hydrostatique | 14 |
| III | L'auto-gravité dans les disques | 15 |
| 1 | La force de Gravitation d'un objet étendu | 15 |
| 2 | L'équation de Poisson | 16 |
| IV | Contenu de la thèse | 17 |

I Les disques en astrophysique

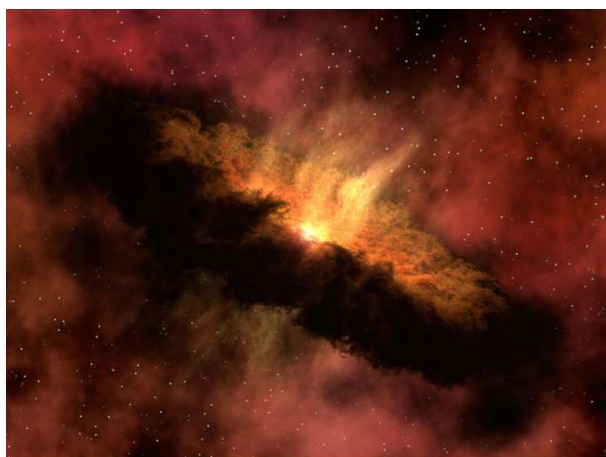


FIGURE 1.1 – Vue d'artiste d'un disque proto-planétaire. Crédits NASA/JPL-Caltech.

Les disques sont très présents dans l'univers : dans les galaxies, autour des trous noirs dans les noyaux actifs de galaxies (AGN), autour des étoiles (disques protoplanétaires), autour de planètes (disques circumplanétaires). Ils sont donc très présents à toutes les échelles de l'univers. Il est donc important de connaître leur structure et leur évolution pour comprendre les processus de formation stellaire et planétaire ou encore pour comprendre la physique des AGN, et de disposer d'outils théoriques et numériques appropriés. Une question que l'on peut se poser concerne la for-

mation de ces disques. Celle-ci implique un phénomène violent : l'effondrement gravitationnel d'une structure (nuage moléculaire, étoile...). L'équilibre de l'objet est gouverné par l'opposition entre la force de gravité et la force de pression interne (en première approximation). Cette situation de stabilité ne dure pas. Elle peut être rompue par un passage près d'une zone de haute densité (bras spiraux des galaxies) ou encore à une onde

de choc (supernovæ). L'enveloppe de gaz entourant la masse centrale, née de l'effondrement gravitationnel, va s'aplatir sous l'effet de la contraction (force de gravité) et de la rotation du nuage (force centrifuge). En effet, les particules sont soumises à la force de

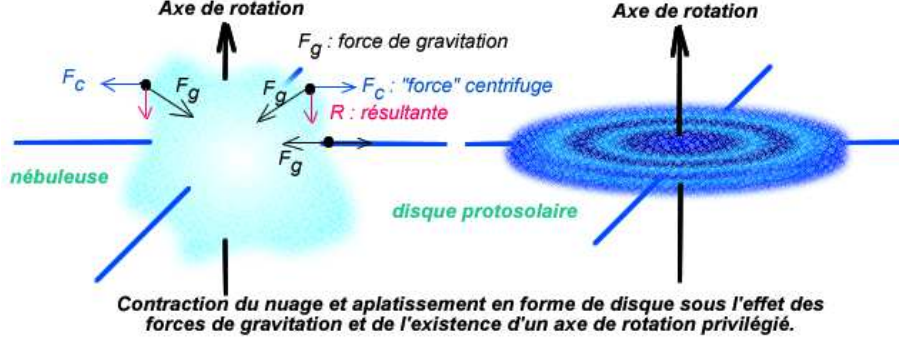


FIGURE 1.2 – Schéma de la formation d'un disque.

gravitation (vecteur \vec{F}_g sur la figure 1.2) qui les attire vers la masse centrale. Mais le gaz étant en rotation, chaque particule est soumise également à la force centrifuge, ce qui attire les particules vers l'extérieur (\vec{F}_c sur la figure 1.2). L'opposition entre ces deux forces va tendre à l'aplatissement de l'enveloppe. Les particules sont attirées dans le plan médian, et finissent par former un disque. Afin de comprendre et d'étudier les disques de gaz, nous avons à disposition des observations et des modèles qui, en incluant au mieux les propriétés physiques principales (hydrodynamique, auto-gravité, viscosité, turbulence...), doivent permettre d'obtenir une représentation fidèle des disques.

II Le modèle standard des disques minces

Un des premiers modèles de disques est le modèle α (ou modèle standard) développé par Shakura and Sunyaev (1973). Ce modèle s'applique à des disques axi-symétriques, c'est à dire à symétrie axiale autour de l'axe de rotation. Ces disques sont aussi géométriquement minces, ce qui signifie que la hauteur du disque h est bien plus petite que le rayon R où celle-ci est mesurée.

1 Structure verticale : équilibre hydrostatique

La structure verticale est gouvernée par l'équilibre hydrostatique, qui est donné par :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = g_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (1.1)$$

où nous employons ici les coordonnées cylindriques (R, Z) . Si la masse du disque M_d est faible devant la masse de l'objet central M_\star alors le potentiel Ψ de la masse centrale domine ; les composants du disque ont une vitesse quasi-képlérienne. L'équation précédente devient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \left(-\frac{GM}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)}{\partial z} = \frac{GMz}{\sqrt{R^2 + z^2}^3}. \quad (1.2)$$

Dans le cas de disques géométriquement minces, nous avons $R \gg z$, ce qui donne :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GMz}{R^3} \quad (1.3)$$

Si de plus nous supposons le disque localement isotherme (c'est-à-dire que la température ne dépend que du rayon), nous pouvons exprimer la pression en fonction de la densité via l'équation suivante :

$$P = c_s^2 \rho \quad (1.4)$$

où c_s est la vitesse du son. L'équation 1.3 devient donc

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{z}{H(r)} \quad (1.5)$$

où $h(R) = c_s/\Omega_k$ avec $\Omega_k = GM/R^3$ la vitesse angulaire képlérienne. Nous avons donc, une fois que nous avons intégré l'équation précédente, le profil de densité vertical suivant :

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\left(\frac{z^2}{2h(R)^2}\right)}, \quad (1.6)$$

où ρ_0 peut-être une fonction de R . Nous remarquons que l'équilibre hydrostatique est gouverné par la composante verticale du champ de gravité. Pour des disques suffisamment massifs, l'auto-gravité du disque entre en jeu.

III L'auto-gravité dans les disques

La structure du disque est alors influencée par sa propre masse. Ceci est d'autant plus vrai que le disque est plus massif. C'est le cas des disques galactiques par exemple. L'auto-gravité peut toutefois apparaître même si $M_d < M_\star$ tant que le disque est "suffisamment" étendu (Abramowicz *et al.*, 1984). Dans ces cas là, il faut prendre en compte le champ de gravité du disque dans l'équilibre hydrostatique (Paczynski, 1978a). Nous pouvons également travailler avec le potentiel gravitationnel qui a l'avantage d'être une grandeur scalaire. Définissons ces grandeurs.

1 La force de Gravitation d'un objet étendu

La force de gravitation est l'une des quatre forces fondamentales de la physique. Cette interaction se caractérise par la loi universelle de la Gravitation énoncée par Isaac Newton dans "*Philosophæ naturalis principia mathematica*" (Newton, 1687). D'après cette loi, la force d'attraction qu'exerce un élément de masse dm' situé au point \mathbf{r}' sur un élément de masse dm en $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ est définie par :

$$d^2 \mathbf{F} = -\frac{G dm dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.7)$$

avec G la constante de gravitation. A partir de cette force, on définit le champ de gravité \mathbf{g} en \mathbf{r} :

$$d\mathbf{g} = -\frac{G dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.8)$$

Le potentiel gravitationnel $\Psi(\mathbf{r})$ est relié au champ par

$$\mathbf{g} = -\nabla_{\mathbf{r}}\Psi. \quad (1.9)$$

ce qui conduit à :

$$d\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{G dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.10)$$

puisque

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.11)$$

Pour un corps non ponctuel, le potentiel gravitationnel s'exprime donc par l'intégrale sur tout l'espace (ou de manière équivalente sur le volume matériel \mathcal{V} occupé par la matière) du produit de la masse volumique $\rho(\mathbf{r}')$ par une fonction que l'on appelle Noyau de Green qui vaut

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.12)$$

Autrement dit nous avons :

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathcal{V}} \frac{G dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.13)$$

où $dm' = \rho(\mathbf{r}') dv'$ où $\rho(\mathbf{r}')$ est la distribution de masse et dv' un petit élément de volume autour de \mathbf{r}' . Chaque élément du volume \mathcal{V} va influencer sur tous les autres éléments du volume. A l'image de la force de Newton, ce noyau de Green a la particularité de diverger lorsque $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$. L'auto-gravité est donc difficile à calculer numériquement.

2 L'équation de Poisson

Le potentiel gravitationnel et la masse volumique sont liés par l'intégrale 1.13 mais aussi par une relation différentielle, l'équation de Poisson (Poisson, 1833), que l'on établit en prenant le Laplacien $\Delta = \nabla_{\mathbf{r}}^2$ de 1.13, soit

$$\Delta_{\mathbf{r}}\Psi = -G \iiint_{\mathcal{V}} \Delta_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \rho = 4\pi G\rho. \quad (1.14)$$

Le cas particulier $\rho = 0$ (hors de toute source) nous donne l'équation de Laplace :

$$\Delta\Psi = 0 \quad (1.15)$$

Il y a donc deux méthodes différentes pour calculer le potentiel, une première méthode intégrale et une seconde méthode différentielle. Les deux approches ont leurs avantages et inconvénients rassemblés pour l'essentiel dans le tableau 1.1. Par exemple, le calcul du potentiel gravitationnel avec l'équation de Poisson est facile et rapide via des algorithmes bien maîtrisés (Stone and Norman, 1992; Matsumoto and Hanawa, 2003; Guillet and Teyssier, 2011). Cependant, sa résolution requiert la connaissance de conditions aux limites précises qui ne peuvent être fournies que par l'expression intégrale. Un autre désavantage concerne la forme de l'objet astrophysique qui est souvent complexe et qui ne peut être toujours décrite simplement dans les systèmes de coordonnées classiques.

| | Équation de Poisson | Intégrale de Newton |
|------------------------|----------------------------------|---------------------|
| difficulté technique | - | singularité |
| technique numérique | différence finie | quadratures |
| paramètres | conditions aux limites | libre |
| conditions aux limites | non | oui |
| précision | faible/fort | fort/faible |
| temps de calcul | court | long |
| géométrie du système | dépendant de la grille de calcul | libre |

TABLE 1.1 – Avantages et inconvénients des deux approches intégrales et différentielles (équations 1.13 et 1.14) dans la détermination du potentiel gravitationnel.

IV Contenu de la thèse

Le potentiel gravitationnel est une grandeur scalaire qui donne accès aux 3 composantes du champ de gravité. Son calcul, plus simple, n'est toutefois pas aisé, surtout si l'on veut atteindre une précision acceptable. C'est le cas pour les disques dont l'aplatissement rend les approches classiques (e.g. le développement multipolaire) souvent inconfortables. L'approche théorique reste intéressante à plusieurs égards : trouver de nouvelles solutions de référence, produire des approximations fiables pour tel ou tel type de configuration, alimenter les modèles et les simulations avec des formules dont la validité est maîtrisée.

Cette thèse est dédiée au calcul du potentiel gravitationnel. C'est un travail de nature plutôt méthodologique. Ce travail regroupe quelques résultats nouveaux qui s'appliquent aux systèmes aplatis, tels que les disques. Nous nous sommes principalement focalisés sur les structures axi-symétriques et verticalement homogènes. Il s'agit de deux hypothèses fortes, souvent reprises dans les modèles, et qui offrent des perspectives intéressantes vis-à-vis des calculs de potentiel.

Dans la première partie, nous parlons de l'une des méthodes les plus utilisées pour calculer le potentiel gravitationnel à l'extérieur des sources : le développement multipolaire. Cet aspect est abordé en coordonnées sphériques et cylindriques à partir de la forme différentielle (équation de Poisson, eq.1.14) et à partir de la forme intégrale (formule intégrale de Newton, équation 1.13). Nous illustrons alors les inconvénients majeurs qu'il y a à utiliser cette approche pour l'auto-gravité des disques par quelques exemples.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés à une autre approche, celle basée sur les intégrales elliptiques. C'est dans le chapitre 3 que nous développons le calcul du potentiel via ces fonctions spéciales (e.g Durand, 1953) ; puis nous montrons deux exemples d'utilisation de cette approche : l'une tirée de Bannikova *et al.* (2011) (donnant des précisions correctes dans le cas d'un tore de section circulaire) et l'autre de Huré (2005) (méthode numérique plus générale). Dans le chapitre 4, nous exposons notre premier résultat : la régularisation de la fonction de Green 1.12, sous l'hypothèse de symétrie axiale et de densité verticalement homogène. Ce développement nous permet de construire une première approximation, valide dans le cas des disques minces et anneaux, puis une seconde, dans le cas de systèmes d'extension radiale faible. C'est l'objet du chapitre 5.

Dans la troisième partie, nous nous focaliserons (chapitre 6) sur la composante verticale du champ d'auto-gravité g_z , dont nous avons vu qu'elle joue un rôle essentiel dans l'équilibre hydrostatique. L'approximation de "Paczynski" (Paczynski, 1978a), généralement utilisée dans les modèles et simulations (Yang and Liu, 1990; Mayer and Duschl, 2005), n'est pas très fiable (pour de simples raisons de validité), notamment sur les bords du disque. Or, les bords sont une composante importante des disques, autant pour la géométrie que pour la dynamique du disque ("réservoir" du moment angulaire, échappement de la radiation,...). Dans les modèles et simulations numériques hydrodynamiques, ils sont souvent négligés, car localisés en dehors de la grille de calcul. Ils sont donc supposés sans influence (Shakura and Sunyaev, 1973; Collin-Souffrin and Dumont, 1990; Dubrulle, 1992), alors que ce sont ces zones que nous observons généralement en premier. Nous présentons donc une extension possible à l'approximation de "Paczynski" qui prend en compte ces effets de bords. Cette nouvelle expression doit permettre de mieux caractériser l'équilibre hydrostatique des disques. C'est l'objet du chapitre 7.

La quatrième et dernière partie (chapitre 8) est dédiée à la généralisation du travail d'Ansorg *et al.* (2003). Nous relâchons en effet l'hypothèse de symétrie axiale pour calculer le potentiel d'une cellule cylindrique sous la forme d'une intégrale sur le contour de la cellule.

Le manuscrit s'achève par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 2

Développement multipolaire : synthèse et limites

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Système de coordonnées sphériques | 20 |
| 1 | Accès au développement multipolaire depuis l'équation de Poisson | 20 |
| 2 | Accès au développement multipolaire à partir de l'intégrale généralisée de Newton | 26 |
| 3 | Application : hypothèse de symétrie | 29 |
| II | Système de coordonnées cylindriques | 30 |
| 1 | Solution à variables séparables de l'équation de Poisson | 30 |
| 2 | Application au disque inhomogène | 32 |
| III | Applications et limites des développements en série dans le cas des disques | 34 |
| 1 | Trois exemples sous symétrie axiale | 34 |
| 2 | Effet de la troncature sur les modèles d'étoiles polytropiques . . | 36 |
| 3 | Conclusion | 39 |

Dans ce chapitre, nous allons brièvement redonner des solutions formelles que l'on peut déduire de ces deux approches et qui donnent accès aux méthodes de calculs les plus employées pour calculer le potentiel gravitationnel d'un corps céleste dans tout l'espace. On retrouvera ces notions dans les ouvrages classiques de théorie du potentiel (par exemple Kellogg, 1929; Binney and Tremaine, 1987; Morse and Feshbach, 1953b,a). Comme nous nous intéressons implicitement plus particulièrement à des systèmes qui sont en rotation, nous utiliserons les coordonnées sphériques et cylindriques parmi les plus usités. Il existent d'autres systèmes de coordonnées, tel que les coordonnées ellipsoïdales ou encore sphéroïdes oblates plus adaptés à des systèmes de disques par exemple. Le lecteur familier avec la théorie du potentiel pourra passer les deux premières sections.

I Système de coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) d'un point A sont définies à partir des coordonnées cartésiennes (x, y, z) par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2.1)$$

où, comme définie sur la figure 2.1, r est la distance entre l'origine O et le point A ,

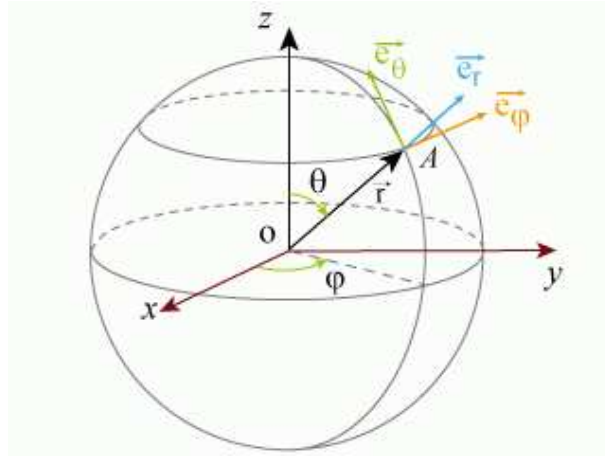


FIGURE 2.1 – Coordonnées sphériques.

$\theta \in [0, \pi]$, appelé colatitude, est l'angle entre le vecteur \mathbf{z} et \mathbf{OA} , et $\phi \in [0, 2\pi]$ est l'angle entre le vecteur \mathbf{x} et la projection de A sur le plan xOy , appelé longitude.

1 Accès au développement multipolaire depuis l'équation de Poisson

1-1 Résolution de l'équation de Laplace

L'équation de Laplace s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0, \quad (2.2)$$

et elle peut être résolue par la méthode de séparation des variables. Dans ce cas, le potentiel s'exprime comme le produit de 3 fonctions à une seule variable :

$$\Psi(r, \theta, \psi) = S(r) \mathcal{P}(\theta) Q(\phi). \quad (2.3)$$

En introduisant l'équation 2.3 dans l'équation 2.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dS(r)}{dr} \right] \mathcal{P}(\theta) Q(\phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\mathcal{P}(\theta)}{d\theta} \right] S(r) Q(\phi) \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2} S(r) \mathcal{P}(\theta) = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

et, après réarrangement des termes de l'équation 2.4, nous avons

$$\frac{\sin^2 \theta}{S(r)} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dS(r)}{dr} \right] + \frac{\sin \theta}{\mathcal{P}(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\mathcal{P}(\theta)}{d\theta} \right] = -\frac{1}{Q(\phi)} \frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2}. \quad (2.5)$$

Le côté gauche de l'équation 2.5 est indépendant de ϕ et le côté droit est indépendant de r et de θ . Chaque membre de cette équation est égal à une constante que l'on nommera m^2 . Nous avons donc deux équations différentielles à satisfaire simultanément :

$$-\frac{1}{Q(\phi)} \frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2} = m^2 \quad (2.6a)$$

et

$$\frac{\sin^2 \theta}{S(r)} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dS(r)}{dr} \right] + \frac{\sin \theta}{\mathcal{P}(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\mathcal{P}(\theta)}{d\theta} \right] = m^2. \quad (2.6b)$$

La première équation différentielle 2.6a s'intègre directement :

$$Q(\phi) = Q_m e^{im\phi} \quad (2.7)$$

Le potentiel (comme toute fonction décrivant une grandeur physique d'ailleurs) est une fonction périodique de 2π en ϕ donc m ne peut prendre que des valeurs entières $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Réécrivant l'équation 2.6b sous cette forme :

$$\frac{1}{S(r)} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dS(r)}{dr} \right] = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta \mathcal{P}(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\mathcal{P}(\theta)}{d\theta} \right], \quad (2.8)$$

nous pouvons effectuer la même opération que celle sur l'équation 2.5. Le côté gauche étant indépendant de θ et le côté droit de r , chacun des deux côtés est égal à une constante que l'on nommera $l(l+1)$. De nouveau, nous avons deux équations différentielles à résoudre simultanément :

$$\frac{1}{S(r)} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dS(r)}{dr} \right] = l(l+1) \quad (2.9a)$$

et

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta \mathcal{P}(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\mathcal{P}(\theta)}{d\theta} \right] = l(l+1) \quad (2.9b)$$

L'équation radiale 2.9a peut se réécrire de la façon suivante :

$$r^2 \frac{d^2 S(r)}{dr^2} + 2r \frac{dS(r)}{dr} - l(l+1)S(r) = 0, \quad (2.10)$$

et a comme solution :

$$S(r) = \alpha' r^l + \beta' r^{-(l+1)}. \quad (2.11)$$

La dernière équation 2.9b devient, après avoir posé $x = \cos \theta$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\mathcal{P}(x)}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right] \mathcal{P}(x) = 0. \quad (2.12)$$

Cette équation est appelée "équation associée de Legendre". Ses solutions sont les fonctions de Legendre associées $P_l^m(x)$ avec l entier positif et $|m| < l$. En regroupant les 3 solutions, nous obtenons :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = [\alpha'_{lm} r^l + \beta'_{lm} r^{-(l+1)}] P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.13)$$

et il est usuel de définir les "harmoniques sphériques" par :

$$Y_l^m(\theta, \phi) = Cste \times P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.14)$$

où la constante est obtenue à partir de la relation d'orthogonalité des harmoniques sphériques :

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.15)$$

δ étant le symbole de Kronecker, c'est à dire $\delta_{ll'} = 1$ si $l = l'$ sinon $\delta_{ll'} = 0$. Cette constante vaut :

$$Cste = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}. \quad (2.16)$$

Nous obtenons une solution à l'équation de Laplace avec $l > 0$ et $|m| < l$:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = [\alpha_{lm} r^l + \beta_{lm} r^{-(l+1)}] Y_l^m(\theta, \phi). \quad (2.17)$$

où $\alpha_{lm} = \alpha'_{lm}/Cste$ et $\beta_{lm} = \beta'_{lm}/Cste$. Nous avons ici la solution de l'équation de Laplace, c'est à dire dans le cas où $\rho = 0$ au point considéré.

1-2 Application au calcul du potentiel gravitationnel d'une coquille sphérique inhomogène

Le calcul s'effectue en 3 étapes. La première étape consiste à calculer le potentiel d'une telle coquille de densité surfacique variable $\rho(a, \theta, \phi) = \sigma(\theta, \phi) \delta(r - a)$, d'épaisseur nulle et de rayon a (Binney and Tremaine, 1987). Nous pouvons donc à l'extérieur et

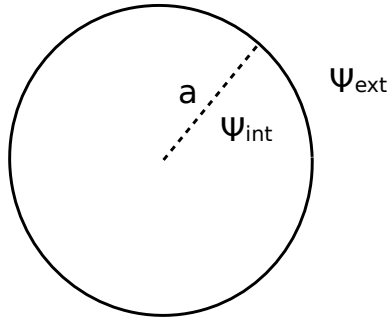


FIGURE 2.2 – Coquille sphérique de rayon a .

à l'intérieur de la coquille utiliser l'équation 2.17 étant donné, que des deux côtés de la coquille la masse volumique est nulle. Nous obtenons, d'après l'équation 2.17, le potentiel

interne Ψ_{int} et le potentiel externe Ψ_{ext} produit par la coquille, en un point de coordonnées $(r \neq a, \theta, \phi)$:

$$\Psi_{\text{int}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\alpha_{lm} r^l + \frac{\beta_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.18a)$$

et

$$\Psi_{\text{ext}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\eta_{lm} r^l + \frac{\gamma_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (2.18b)$$

1-2-1 Détermination des constantes

Ces deux fonctions doivent satisfaire les conditions d'un potentiel "physique", ce qui nous permet d'exprimer les quatre constantes $(\alpha, \beta, \eta, \gamma)$, c'est à dire :

- au centre, le potentiel gravitationnel ne doit pas être singulier (pour un problème physique du moins), ce qui impose $\beta_{lm} = 0 \quad \forall (l, m)$;
- à l'infini le potentiel s'annule, donc $\eta_{lm} = 0 \quad \forall (l, m)$;
- le potentiel est périodique en ϕ , ce qui est naturellement assuré par les harmoniques sphériques,
- le potentiel est continu à la surface (i.e $r = a$) (e.g. Durand, 1953) :

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm} a^l Y_l^m(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\gamma_{lm}}{a^{l+1}} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (2.19)$$

Pour que l'équation 2.19 soit vérifiée, il faut que $\forall (\theta, \phi)$, les coefficients des harmoniques sphériques soient égaux pour un m et un l donné, soit :

$$\gamma_{lm} = \alpha_{lm} a^{2l+1}. \quad (2.20)$$

1-2-2 Expression de la densité surfacique $\sigma(\theta, \phi)$

Toute fonction continue et dérivable pouvant se décomposer en harmoniques sphériques, nous pouvons développer en série la densité surfacique :

$$\sigma(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sigma_{lm} Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.21)$$

les coefficients étant obtenus grâce à la relation d'orthogonalité des harmoniques sphériques 2.15, soit :

$$\sigma_{lm} = \iint \sigma(\theta, \phi) Y_l^{m*}(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi. \quad (2.22)$$

1-2-3 Théorème de Green-Ostrogradski

Le théorème de Green-Ostrogradski, ou théorème de flux-divergence, nous dit que l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume \mathcal{V} est égale à l'intégrale du flux de ce champ à travers la surface fermée $\delta\mathcal{V}$ définissant ce volume. Nous l'appliquons ici au champ de gravitation :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \, dV = \oiint_{\delta\mathcal{V}} \vec{g} \cdot d\vec{S} \quad (2.23)$$

En notant que $\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi)$, nous avons d'après l'équation de Poisson 1.14 :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dV = -4\pi G \iiint_{\mathcal{V}} \rho dV = -4\pi GM. \quad (2.24)$$

Ce qui nous donne :

$$\oint_{\delta\mathcal{V}} \vec{g} dS = -4\pi GM, \quad (2.25)$$

où M est la masse contenue dans \mathcal{V} . C'est le théorème de Gauss. Nous l'appliquons à la coquille. Dans la limite où l'on est infiniment proche, la surface est suffisamment petite pour être considérée comme plane, comme représenté sur la figure 2.3. Nous calculons le

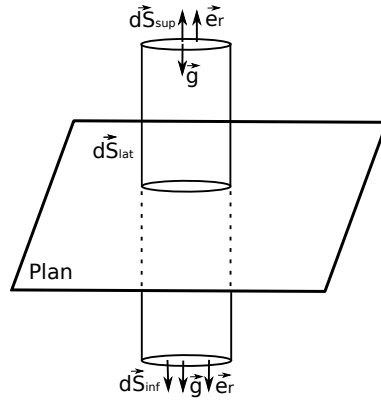


FIGURE 2.3 – Surface de Gauss interceptant le plan.

flux à travers chaque surface du cylindre et nous obtenons :

- sur la surface supérieure le flux F_{sup} à travers $d\vec{S}_{sup}$:

$$F_{sup} = g_r \vec{e}_r \cdot d\vec{S}_{sup} = -\frac{\partial \Psi_{ext}}{\partial r} dS_{sup}, \quad (2.26)$$

- sur la surface inférieure le flux F_{inf} à travers l'élément $d\vec{S}_{inf}$:

$$F_{inf} = g_r \vec{e}_r \cdot d\vec{S}_{inf} = \frac{\partial \Psi_{int}}{\partial r} dS_{inf}, \quad (2.27)$$

- sur la surface latérale :

$$F_{lat} = \vec{g} \cdot d\vec{S}_{lat}. \quad (2.28)$$

Or, d'après le théorème de Gauss,

$$-4\pi G\sigma dS = F_{sup} + F_{inf} + F_{lat} \quad (2.29)$$

$$= -\frac{\partial \Psi_{ext}}{\partial r} dS_{sup} + \frac{\partial \Psi_{int}}{\partial r} dS_{inf} + \vec{g} \cdot d\vec{S}_{lat} \quad (2.30)$$

où σ est la densité de surface locale. Si nous faisons tendre les surfaces dS_{inf} et dS_{sup} vers dS dans l'équation 2.29, dS_{lat} devient donc nul et nous obtenons le résultat bien connu suivant.

$$\left(\frac{\partial \Psi_{ext}}{\partial r} \right)_{r=a} - \left(\frac{\partial \Psi_{int}}{\partial r} \right)_{r=a} = 4\pi G\sigma(\theta, \phi). \quad (2.31)$$

Cette dernière équation nous permet, en y injectant l'équation 2.18 et 2.20, de donner l'expression des coefficients des harmoniques sphériques du potentiel en fonction de deux de la densité surfacique. Nous obtenons donc :

$$-\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (2l+1) \alpha_{lm} a^{l-1} Y_l^m(\theta, \phi) = 4\pi G \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sigma_{lm} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (2.32)$$

Comme précédemment $\forall (\theta, \phi)$ les coefficients doivent être égaux un à un des deux côtés de l'équation 2.32 pour un l et un m donnés, ce qui nous donne la relation suivante.

$$\alpha_{lm} = \frac{-4\pi G}{a^{l-1}} \frac{\sigma_{lm}}{2l+1}; \quad (2.33)$$

1-2-4 Expression du potentiel d'une coquille sphérique de rayon a

Compte-tenu des développements ci-dessus, nous pouvons maintenant donner l'expression des potentiels intérieur et extérieur à la coquille sphérique :

$$\Psi_{\text{int}}(r, \theta, \phi) = -4\pi G a \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \sum_{m=-l}^l \frac{\sigma_{lm}}{2l+1} Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.34a)$$

et

$$\Psi_{\text{ext}}(r, \theta, \phi) = -4\pi G a \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l \frac{\sigma_{lm}}{2l+1} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.34b)$$

où σ_{lm} est donné par l'équation 2.22.

1-2-5 Application au calcul du potentiel gravitationnel d'un corps quelconque

Nous pouvons maintenant donner l'expression du potentiel d'un corps inhomogène quelconque en découpant celui-ci en une série de coquilles sphériques d'épaisseur da . Chaque coquille produit un potentiel $d\Psi(r, \theta, \phi, a)$ donné par l'équation 2.34 (selon son rayon), et les coefficients de densité surfacique sont $d\sigma_{lm}(a) = \rho_{lm}(a) da$. Ainsi, le potentiel en un point r du corps généré par les coquilles est la somme du potentiel extérieur tant que leurs rayons $a < r$, et du potentiel intérieur une fois que $a > r$. Dans la limite continue, ceci donne la formule générale suivante.

$$\Psi(r, \theta, \phi) = -4\pi G \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{2l+1} \left(\frac{1}{r^{l+1}} \int_0^r a^{l+2} \rho_{lm} da + r^l \int_r^{\infty} \frac{\rho_{lm}}{a^{l-1}} da \right) \quad (2.35)$$

Le potentiel d'un corps est ici exprimé en une somme d'une infinité de termes appelés multipôles. Le premier terme est appelé monopole.

1-3 Cas de la sphère homogène

C'est un cas d'école auquel on accède via le théorème de Gauss, mais nous le retrouvons par le développement multipolaire ci-dessus. Nous supposons une sphère homogène $\rho_{lm} = \rho_0$ de rayon R . Calculons le potentiel gravitationnel interne et externe en un point de coordonnées (r, θ, ϕ) généré par la sphère. Si nous découpons comme précédemment l'objet

en coquilles sphériques, l'expression du potentiel nous est donné par l'équation 2.35 avec $l = 0, m = 0$ et avec la borne supérieure de la deuxième intégrale qui vaut le rayon de la sphère (au delà la masse volumique est nulle).

1-3-1 Potentiel interne

Nous nous plaçons en un point de coordonnées (r, θ, ϕ) à l'intérieur de la sphère. Les deux intégrales contribuent au calcul. Le potentiel vaut :

$$\begin{aligned}\Psi_{int}(r, \theta, \phi) &= -4\pi G\rho_0 \left(\frac{1}{r} \int_0^r a^2 da + \int_r^R a da \right) \\ &= \frac{GM}{2R^3} r^2 - \frac{3}{2} \frac{GM}{R}\end{aligned}\quad (2.36)$$

avec $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$, masse de la sphère homogène.

1-3-2 Potentiel externe

Nous nous plaçons en un point de coordonnées r, θ, ϕ à l'extérieur de la sphère. Seule la première intégrale contribue. Le potentiel vaut :

$$\begin{aligned}\Psi_{ext}(r, \theta, \phi) &= -4\pi G\rho_0 \frac{1}{r} \int_0^R a^2 da \\ &= -\frac{GM}{r}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

2 Accès au développement multipolaire à partir de l'intégrale généralisée de Newton

Rappelons que le potentiel gravitationnel dû à un volume \mathcal{V} contenant une densité de matière $\rho(\mathbf{r}')$ en un point $P(\mathbf{r})$ est donné par l'équation 1.13. L'avantage de cette méthode est que nous pouvons calculer le potentiel en tout point de la distribution considérée. L'inconvénient majeur est que le noyau de Green diverge lorsque $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$. Il n'est donc pas aisé de calculer numériquement le potentiel dès l'instant où nous sommes à l'intérieur de l'objet, sur la frontière ou encore dans son voisinage immédiat. C'est la raison pour laquelle le développement multipolaire est utilisé (aucune divergence n'y apparaît). Nous verrons dans les chapitres suivants des moyens plus ou moins efficaces permettant de contourner le problème.

2-1 Apparition des polynômes de Legendre

Le point de départ est l'expression du potentiel via l'intégrale de Newton donnée par l'équation 1.13. On note (r', θ', ϕ') les coordonnées sphériques d'un point source du volume matériel \mathcal{V} , \vec{r}' le vecteur repérant P' , et

$$\mu = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (2.38)$$

la distance entre P et P' ; μ peut s'écrire en coordonnées cartésiennes :

$$\mu^2 = (x_P - x_{P'})^2 + (y_P - y_{P'})^2 + (z_P - z_{P'})^2, \quad (2.39)$$

et donc en sphériques :

$$\mu^2 = (r \cos \phi \sin \theta - r' \cos \phi' \sin \theta')^2 + (r \sin \theta \sin \phi - r' \sin \theta' \sin \phi')^2 \quad (2.40)$$

$$+ (r \cos \theta - r' \cos \theta')^2. \quad (2.41)$$

En notant que :

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{rr'}, \quad (2.42)$$

où γ est l'angle entre \mathbf{r} et \mathbf{r}' . Nous obtenons :

$$\mu^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma. \quad (2.43)$$

Le potentiel dû au volume \mathcal{V} contenant une densité de matière $\rho(\mathbf{r}')$ s'écrit donc :

$$\Psi(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} d\mathbf{r}', \quad (2.44)$$

$$= -G \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \Lambda(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{r}', \quad (2.45)$$

où $d\mathbf{r}'$ est le volume élémentaire et $\Lambda(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ la fonction de Green. Nous pouvons alors effectuer un développement limité de $\Lambda(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ lorsque P s'approche de P'. Nous avons donc deux cas. Le premier consiste à faire un développement en série en $\frac{r}{r'}$ dans le cas $r > r'$ et en $\frac{r'}{r}$ dans le cas où $r < r'$. Le potentiel s'écrira alors comme :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \Psi_{r>r'}(\mathbf{r}) & \text{si } r > r' \\ \Psi_{r<r'}(\mathbf{r}) & \text{si } r < r'. \end{cases} \quad (2.46)$$

2-2 Calcul de la fonction de Green quand $r < r'$

Nous pouvons réécrire la précédente équation comme :

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) &= \frac{1}{r' \sqrt{1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2\frac{r}{r'} \cos \gamma}}, \\ &= \frac{1}{r' \sqrt{1 + \frac{r}{r'} \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \gamma \right)}}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

et faire un développement en série en $\frac{r}{r'}$ du dénominateur. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r' \sqrt{1 + \frac{r}{r'} \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \gamma \right)}} &= \frac{1}{r'} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{r}{r'} \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \gamma \right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \gamma \right)^2 \right. \\ &\quad - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{r}{r'} \right)^3 \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \gamma \right)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - j \right) \left[\frac{r}{r'} \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \gamma \right) \right]^n \\ &\quad \left. + \mathcal{O} \left[\frac{r}{r'} \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \gamma \right) \right]^n \right\}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

soit à l'ordre 4 inclus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r' \sqrt{1 + \frac{r}{r'} \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \gamma \right)}} &= \frac{1}{r'} \left[1 + \left(\frac{r}{r'} \right) \cos \gamma + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r}{r'} \right)^3 \left(\frac{5}{2} \cos^3 \gamma - \frac{3}{2} \cos \gamma \right) + \left(\frac{r}{r'} \right)^4 \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \gamma - \frac{35}{8} \cos^4 \gamma \right) + \mathcal{O} \left(\frac{r}{r'} \right)^5 \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Nous pouvons noter que :

$$\begin{cases} P_0(\cos \gamma) = 1, \\ P_1(\cos \gamma) = \cos \gamma, \\ P_2(\cos \gamma) = \frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} P_3(\cos \gamma) = \frac{5}{2} \cos^3 \gamma - \frac{3}{2} \cos \gamma, \\ P_4(\cos \gamma) = \frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \gamma - \frac{35}{8} \cos^4 \gamma, \end{cases}$$

où les $P_n(\cos \gamma)$ sont les polynômes de Legendre. Nous pouvons donc exprimer $1/\mu$ comme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r' \sqrt{1 + \frac{r}{r'} \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \gamma \right)}} &= \frac{1}{r'} \left[P_0(\cos \gamma) + \left(\frac{r}{r'} \right) P_1(\cos \gamma) + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 P_2(\cos \gamma) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r}{r'} \right)^3 P_3(\cos \gamma) + \left(\frac{r}{r'} \right)^4 P_4(\cos \gamma) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'} \right)^l P_l(\cos \gamma). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Nous pouvons constater qu'aucun des termes n'est divergent.

2-3 Calcul de la fonction de Green quand $r > r'$

Le raisonnement est le même que précédemment sauf que nous faisons un développement en série de μ de $\frac{r'}{r}$, ce qui nous donne une relation presque similaire à 2.50, à savoir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{r'}{r} \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \gamma \right)}} &= \frac{1}{r} \left[P_0(\cos \gamma) + \left(\frac{r'}{r} \right) P_1(\cos \gamma) + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 P_2(\cos \gamma) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 P_3(\cos \gamma) + \left(\frac{r'}{r} \right)^4 P_4(\cos \gamma) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos \gamma). \end{aligned} \quad (2.51)$$

2-4 Des polynômes de Legendre aux harmoniques sphériques

Le théorème d'addition des harmoniques sphériques (Gradshteyn and Ryzhik, 1965) qui s'écrit par exemple :

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l [Y_l^m(\theta', \phi')]^* Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.52)$$

où $[X]^*$ est le complexe conjugué de $[X]$, et

$$[Y_l^m(\theta, \phi)]^* = Y_l^{-m}(\theta, \phi), \quad (2.53)$$

fait le lien entre les polynômes de Legendre et les harmoniques sphériques ainsi nous retrouvons (e.g. Jackson, 1998) :

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} [Y_l^m(\theta', \phi')]^* Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.54)$$

si $r > r'$ et

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r'^{l+1}} [Y_l^m(\theta', \phi')]^* Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.55)$$

si $r < r'$.

2-5 Expression du potentiel gravitationnel en fonction des harmoniques sphériques

Nous retrouvons donc bien la même expression que précédemment (cf equation 2.35) pour le potentiel gravitationnel d'un corps non homogène (e.g. Jackson, 1998; Cohl and Tohline, 1999). Si $r > r'$ le potentiel est donné par la formule suivante :

$$\Psi_{r>r'} = -G \int_{r>r'} \rho(r') \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l [Y_l^m(\theta', \phi')]^* Y_l^m(\theta, \phi) dv', \quad (2.56)$$

et, si $r < r'$ l'expression est la suivante :

$$\Psi_{r<r'} = -G \int_{r<r'} \rho(r') \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l [Y_l^m(\theta', \phi')]^* Y_l^m(\theta, \phi) dv'. \quad (2.57)$$

3 Application : hypothèse de symétrie

Pour des systèmes (comme les disques) possédant :

- la symétrie de révolution autour de l'axe $(O; z)$
- la symétrie miroir par rapport au plan $(O; x, y)$.

Le potentiel est indépendant de la longitude. La dépendance en longitude apparaît dans les harmoniques sphériques (voir eq.2.14). Pour que la dépendance en ϕ disparaisse, il faut donc que $m = 0$. Le potentiel gravitationnel généré en un point à l'extérieur de la source est donné par :

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{G}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos \theta)}{r^l} \int_V \rho(\mathbf{r}') P_l(\cos \theta') r'^l dv'. \quad (2.58)$$

La deuxième symétrie impose $\Psi(\pi - \theta) = \Psi(\theta)$, ce qui annule les coefficients impairs des polynôme de Legendre. Ce qui donne pour finir :

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{G}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{2l}} j_{2l} P_{2l}(\cos \theta), \quad (2.59)$$

avec

$$j_{2l} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') P_{2l}(\cos \theta') r'^{2l} dv' \quad (2.60)$$

moment gravitationnel d'ordre $2l$. Terminons en calculant le premier terme de la série : le monopôle. C'est le terme correspondant à $l = 0$ donc $m = 0$. D'après l'équation 2.58, nous avons :

$$\begin{aligned} \Psi^0(\mathbf{r}) &= -\frac{G}{r} \int_{\mathcal{V}} \rho(r') P_0(\cos \theta') dv', \\ &= -G \frac{1}{r} \int_{\mathcal{V}} \rho(r') dv', \\ &= -\frac{GM}{r}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

avec $P_0(\cos \theta') = 1$ et $M = \int_{\mathcal{V}} \rho(r') dv'$ la masse totale de la distribution.

II Système de coordonnées cylindriques

Les coordonnées cartésiennes x, y, z s'expriment en fonction des coordonnées cylindriques (R, θ, Z) telles que :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta, \\ y = R \sin \theta, \\ z = Z, \end{cases} \quad (2.62)$$

où R est la distance entre le point P et l'origine, θ est l'angle entre l'axe Ox et la

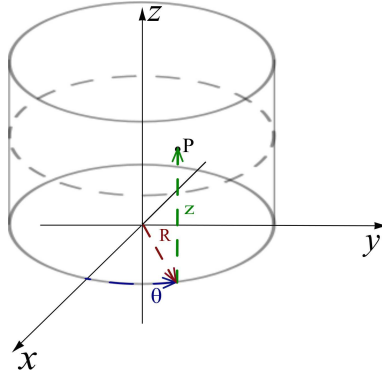


FIGURE 2.4 – Coordonnées cylindriques.

projection du point P sur le plan xOy et Z est la distance entre le plan xOy et le point P (comme défini sur la figure 2.4).

1 Solution à variables séparables de l'équation de Poisson

Nous pouvons reprendre la même démarche que celle utilisée en sphériques :

- i) solution dans le "vide",
- ii) disque infiniment mince,

- iii) découpage d'un corps en une infinité de disques infiniment minces de rayons différents.

Le potentiel gravitationnel peut donc se développer sur les "harmoniques cylindriques", plus communément appelées les fonctions de Bessel, solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques (Jackson, 1998). C'est ce que nous allons commenter dans cette section.

1-1 Équation de Laplace en coordonnées cylindriques

L'équation de Laplace en coordonnées cylindriques est donnée par la formule suivante :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = 0, \quad (2.63)$$

et nous supposons que Ψ peut s'exprimer comme le produit de 3 fonctions d'une seule variable, soit :

$$\Psi(R, \theta, Z) = \eta(R)\tau(\theta)\chi(Z). \quad (2.64)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation 2.63, nous avons :

$$\frac{\tau(\theta)\chi(Z)}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d\eta(R)}{dR} \right] + \frac{\eta(R)\chi(Z)}{R^2} \frac{d^2\tau(\theta)}{d\theta^2} + \eta(R)\tau(\theta) \frac{d^2\chi(Z)}{dZ^2} = 0, \quad (2.65)$$

soit,

$$\frac{1}{R\eta(R)} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d\eta(R)}{dR} \right] + \frac{1}{R^2\tau(\theta)} \frac{d^2\tau(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{1}{\chi(Z)} \frac{d^2\chi(Z)}{dZ^2}. \quad (2.66)$$

Le côté droit de l'équation précédente est indépendant de R et de θ alors que le côté gauche est indépendant de z , ce qui donne le système d'équations différentielles, à résoudre simultanément, suivant :

$$\frac{d^2\chi(Z)}{dZ^2} - c_1\chi(Z) = 0, \quad (2.67a)$$

et

$$\frac{1}{R\eta(R)} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d\eta(R)}{dR} \right] + \frac{1}{R^2\tau(\theta)} \frac{d^2\tau(\theta)}{d\theta^2} + c_1 = 0, \quad (2.67b)$$

où c_1 est une constante. Pour les mêmes raisons, l'équation 2.67b peut aussi se scinder en un système de deux équations différentielles :

$$\frac{d^2\tau(\theta)}{d\theta^2} - c_2\tau(\theta) = 0, \quad (2.68a)$$

et

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d\eta(R)}{dR} \right] + (c_1 R^2 + c_2)\eta(R) = 0. \quad (2.68b)$$

Le potentiel gravitationnel étant une fonction de période 2π , nous avons $c_2 = -m^2$ où m est un entier. La constante c_1 dépend des conditions aux limites en z . Nous pouvons poser

$c_1 = k^2$ (k peut être un nombre réel ou complexe) et ainsi aisément résoudre les équations 2.67a et 2.68a :

$$\tau(\theta) = e^{im\theta}, \quad (2.69a)$$

et

$$\chi(z) = e^{\pm kZ}. \quad (2.69b)$$

En effectuant le changement de variables suivant $x = \sqrt{c_1 R}$ et $c_1 > 0$, l'équation 2.68b devient :

$$\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\eta(x)}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) \eta(x) = 0. \quad (2.70)$$

Cette équation est l'équation de Bessel et ses solutions sont les fonctions de Bessel d'ordre m , soit

$$\eta(R) = J_m(kR). \quad (2.71)$$

Nous obtenons donc, en regroupant les 3 solutions, une solution de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques :

$$\Psi(R, \theta, Z) = A e^{im\theta - k|Z|} J_m(kR), \quad (2.72)$$

où A est une constante. Cette équation et toutes combinaisons linéaires de cette dernière sont solutions de l'équation de Laplace $\nabla^2 \Psi = 0$.

2 Application au disque inhomogène

Pour un disque de densité surfacique variable $\rho(R, \theta, z) = \Sigma(R, \theta) \delta(Z - z)$, de rayon a , d'épaisseur nulle, situé en $z = 0$, le potentiel gravitationnel en $Z > 0$ et en $Z < 0$ est donné par les deux relations suivantes :

$$\Psi(R, \theta, Z > 0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} A_m(k) e^{im\theta - kZ} J_m(kR) dk, \quad (2.73)$$

et

$$\Psi(R, \theta, Z < 0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} A_m(k) e^{im\theta + kZ} J_m(kR) dk. \quad (2.74)$$

Ce dernier satisfait les conditions d'un potentiel "physique" c'est à dire qu'il :

- est fini en $R = 0$. En effet les fonctions de Bessel $J_m(0)$ sont continues $\forall m$ (cf définition Annexe C) ;
- s'annule à grande distance (voir figure C.1 de l'Annexe C) ;
- est périodique en θ , ce qui est assuré par la fonction exponentielle d'argument complexe.

2-1 Théorème de Gauss & Expression de la densité de surface

Nous exprimons la densité surfacique inhomogène $\Sigma(R, \theta)$ sous la forme suivante :

$$\Sigma(R, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \Sigma_m(k) e^{im\theta} J_m(kR) dk. \quad (2.75)$$

Nous appliquons maintenant le théorème de Gauss sur une boîte fermée contenant une partie du disque, ce qui nous permet d'imposer la relation suivante :

$$\left(\frac{\partial \Psi_{Z>0}}{\partial Z} \right)_{Z \rightarrow 0+} - \left(\frac{\partial \Psi_{Z<0}}{\partial Z} \right)_{Z \rightarrow 0-} = 4\pi G \Sigma_{km}(R, \theta), \quad (2.76)$$

ce qui nous donne :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} (-2k) A_m(k) e^{im\theta} J_m(kR) dk = 4\pi G \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \Sigma_m(k) e^{im\theta} J_m(kR) dk. \quad (2.77)$$

Nous obtenons donc une relation entre les $A_m(k)$ et les $\Sigma_m(k)$:

$$\Sigma_m(k) = \frac{-2k}{4\pi G} A_m(k), \quad (2.78)$$

et la densité de surface est alors donnée par :

$$\Sigma(R, \theta) = -\frac{1}{2\pi G} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} k A_m(k) e^{im\theta} J_m(kR) dk. \quad (2.79)$$

2-2 Expression des coefficients $A_m(k)$

Pour extraire les coefficients $A_m(k)$, on commence par multiplier par $e^{-im'\theta}$ et moyenner sur θ des deux côtés de l'équation précédente, ce qui donne :

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im'\theta} \Sigma(R, \theta) d\theta}_{\Sigma_{m'}(R, \theta)} = -\frac{1}{2\pi G} \int_0^{\infty} k A'_m(k) e^{im'\theta} J'_m(kR) dk. \quad (2.80)$$

A l'aide d'une transformée de Hankel (définie en Annexe C), nous avons :

$$A_m(k) = -2\pi G \int_0^{\infty} R J_m(kR) \Sigma_m(R, \theta) dR. \quad (2.81)$$

Cela nous permet de donner l'expression du potentiel gravitationnel d'un disque inhomogène infiniment mince (Binney and Tremaine, 1987) :

$$\Psi_{\pm}(R, \theta, Z) = -2\pi G \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{im\theta - k|Z|} J_m(kR) \int_0^{\infty} R' J_m(kR') dk \Sigma_m(R', \theta') dR'. \quad (2.82)$$

2-3 Application : potentiel d'un corps quelconque

Maintenant, nous pouvons donner le potentiel d'un corps découpé en une infinité de disques d'épaisseur dz . Chaque disque de rayon a a une altitude z et une densité surfacique $d\Sigma_m(a, \theta', z) = \rho_m(a, \theta', z) dz$ donnée par l'équation 2.82 produit un potentiel $d\Psi(R, \theta, Z)$. Ainsi, le potentiel total est donné par :

$$\Psi(R, \theta, Z) = -2\pi G \int_0^Z \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{im\theta - k|Z-z|} J_m(kR) \int_0^{\infty} a J_m(ka) \rho_m da dz, \quad (2.83)$$

avec $\Sigma_m(R')$ donnée par l'équation 2.80. Le potentiel est ici exprimé par une somme d'une infinités de termes et une intégrale sur les fonctions de Bessel.

III Applications et limites des développements en série dans le cas des disques

Dans la section précédente, nous avons reproduit les expressions classiques permettant de calculer le potentiel gravitationnel d'un objet, soit décrit par les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , soit par les coordonnées cylindriques (R, θ, Z) . Selon l'objet étudié, l'un ou l'autre des systèmes de coordonnées va être plus adapté à la description de ce dernier.

Le calcul numérique du potentiel gravitationnel d'objet s'éloignant de la sphéricité, donc des disques par exemple, n'est pas chose aisée. La difficulté, comme nous l'avons souligné dans la section précédente, provient du traitement de la singularité du noyau de Green $1/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ quand $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$. Les méthodes que nous allons voir, permettent dans certains cas d'éviter la singularité mais rajoutent en contrepartie de nouveaux problèmes. Dans cette section, nous allons montrer les limites du développement multipolaire autant en coordonnées sphériques, qu'en coordonnées cylindriques, en l'appliquant au potentiel des disques auto-gravitants.

1 Trois exemples sous symétrie axiale

1-1 A partir des harmoniques sphériques

L'hypothèse de symétrie axiale impose $m = 0$ dans les équations de la fonction de Green 2.55 et 2.54, ce qui entraîne :

$$Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \quad (2.84)$$

Les équations 2.55 et 2.54 deviennent donc :

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') \quad \text{si } r > r', \quad (2.85a)$$

et

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') \quad \text{si } r < r'. \quad (2.85b)$$

Le potentiel est donc donné par l'expression suivante (e.g. Cohl and Tohline, 1999) :

$$\Psi(\mathbf{r}) = -G \iiint \rho(\mathbf{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') d\mathbf{r}', \quad \text{si } r > r', \quad (2.86a)$$

et

$$\Psi(\mathbf{r}) = -G \iiint \rho(\mathbf{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') d\mathbf{r}', \quad \text{si } r < r'. \quad (2.86b)$$

Si cette formule a l'avantage de ne plus diverger en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, on ne peut, en pratique, prendre en compte tous les termes de la série qui doit être tronquer à un certain ordre $l = l_0$. En conséquence, le potentiel obtenu est approché. On prendra a priori une valeur de l_0 grande : plus grand sera le nombre de termes de la série, meilleure sera l'approximation.

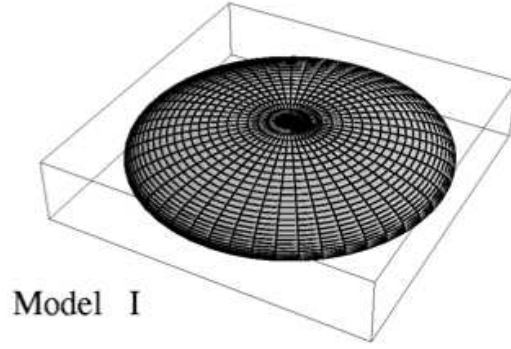


FIGURE 2.5 – Sphéroïde oblate (Cohl and Tohline, 1999).

A l'extérieur des sources, l'erreur de troncature est généralement faible, d'autant plus que nous sommes loin de la source, ce qui rend le développement multipolaire aussi puissant. A l'infini d'ailleurs, seul le terme multipolaire est non nul. Dans le voisinage immédiat et dans la source, ce n'est plus vrai du tout : le développement en série requiert un nombre infini de termes dès que $r = r'$, soit en tout point intérieur. Nous allons illustrer cet effet, autant à l'intérieur qu'à l'extérieur, pour trois systèmes différents.

1-1-1 A l'extérieur d'un sphéroïde oblate

Le potentiel gravitationnel extérieur à un sphéroïde oblate axi-symétrique, de rayon équatorial a_1 et de rayon polaire a_3 est donné, en fonction de (R, Z) les coordonnées cylindriques, par l'équation suivante (Chandrasekhar, 1973) :

$$\Psi(R, Z) = \pi G \rho_0 a_1^2 a_3 \left\{ \left[1 + \frac{R^2}{2(a_3^2 - a_1^2)} - \frac{Z^2}{a_3^2 - a_1^2} \right] I_1 - \frac{R^2 \sqrt{a_3^2 + \lambda}}{(a_3^2 - a_1^2)(a_1^2 + \lambda)} - \frac{2Z^2}{(a_1^2 + \lambda)\sqrt{a_3^2 + \lambda}} - \frac{2Z^2 \sqrt{a_3^2 + \lambda}}{(a_3^2 - a_1^2)(a_1^2 + \lambda)} \right\}, \quad (2.87)$$

où

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[(R^2 + Z^2 - a_1^2 - a_3^2) + \sqrt{(a_1^2 + a_3^2 - R^2 - Z^2)^2 - 4(a_1^2 a_3^2 - R^2 a_3^2 - Z^2 a_1^2)} \right], \quad (2.88)$$

et

$$I_1 = \frac{\pi}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} - \frac{2}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \arctan \sqrt{\frac{a_3^2 + \lambda}{a_1^2 - a_3^2}}. \quad (2.89)$$

Ce sphéroïde peut d'ailleurs être considéré comme un disque axi-symétrique. L'erreur entre le potentiel exact et le potentiel développé en harmoniques sphériques à l'extérieur du sphéroïde est représentée par la figure 2.6 tirée de Cohl and Tohline (1999). Cette erreur est calculée en prenant des valeurs de l_0 différentes (de $l_0 = 2$ représenté par la courbe en tiret jusqu'à $l_0 = 10$ la courbe en tiret-point), le long d'un contour rectangulaire entourant le système. Nous remarquons que l'erreur diminue effectivement lorsque l'on

augmente la valeur de l_0 . Pour obtenir une bonne précision il faut donc avoir une valeur de l_0 suffisamment grande pour avoir une erreur la plus faible possible. Ici, avec 10 termes, l'erreur reste relativement correcte, de l'ordre de 0.1%. Ceci n'est pas étonnant vu que nous sommes à l'extérieur.

1-1-2 A l'intérieur d'un disque infiniment mince

L'approche multipolaire a été testée pour un disque infiniment mince, mais cette fois à l'intérieur du système par Pierens (2005) qui a aussi étudié la convergence de la série en fonction de l'ordre de la troncature. C'est ce que montre la figure 2.7 où l'on a considéré un disque avec profil de densité de surface $\Sigma \propto 1/r$ qui s'étale de $a_{in} = 1$ à $a_{out} = 100$. Dans ce cas, il n'existe pas de forme fermée pour la solution de référence qui a été obtenue par la méthode de "splitting", que nous décrirons dans un prochain chapitre. Soulignons que cette méthode permet assez facilement d'atteindre la précision de la machine par un traitement analytique de la singularité du noyau de Green. La courbe est tracée dans le plan médian du disque donc à l'intérieur de celui-ci. Nous pouvons remarquer qu'il faut augmenter de manière assez conséquente le nombre de termes à prendre en compte si l'on veut obtenir une approximation correcte du potentiel. Ici, on atteint $\sim 10^{-3}$ pour $l_0 \sim 200$.

1-2 A partir des fonctions de Bessel

Comme nous avons pu le voir dans la section II-2, en coordonnées cylindriques, le potentiel gravitationnel est donné par l'équation 2.83. Dans ce cas pour le disque infiniment mince, l'invariance de la densité selon l'angle azimutal θ donne également $m = 0$. Le potentiel gravitationnel s'exprime donc par la relation suivante :

$$\psi(\mathbf{r}) = -2\pi G \int_0^\infty J_0(kR) \int_{a_{in}}^{a_{out}} \int_{-h}^h \rho(a, z) J_0(ka) e^{-k(Z-z)} dk dS', \quad (2.90)$$

où $dS' = a da dz$ est l'élément de surface élémentaire (section méridionale). En comparaison avec la formule du potentiel en coordonnées sphériques, celle-ci à l'avantage de ne plus comporter de somme jusqu'à l'infini, mais est composée de fonctions de Bessel. Il est connu que les fonctions de Bessel sont difficile à intégrer car elles sont oscillantes et définies sur un intervalle infini. La figure 2.8, extraite de Pierens (2005), montre l'erreur entre le potentiel gravitationnel calculé avec l'équation 2.90 et le potentiel de référence (méthode de "splitting" ; voir plus loin) pour trois disques infiniment minces de densité surfacique $\Sigma \propto 1/R^\alpha$ avec $\alpha = 1, 2, 3$, s'étendant de $a_{in} = 1$ à $a_{out} = 100$. Nous pouvons voir que l'erreur reste correcte pour $\alpha = 1$ mais augmente nettement dès que le profil de densité devient piqué au bord interne. Elle peut atteindre 10% (pour $\alpha = 2$) et 30% (pour $\alpha = 3$) sur le bord externe du disque.

2 Effet de la troncature sur les modèles d'étoiles polytropiques

Hachisu (1986) a produit des structures tridimensionnelles en rotation à l'équilibre (étoiles, systèmes multiples, ellipsoïdes, tores). Sans entrer dans le détail du modèle (schéma itératif sur l'équation de Bernoulli gouvernant l'équilibre du système (Hachisu, 1986)), le potentiel gravitationnel est évalué par un développement multipolaire sur les

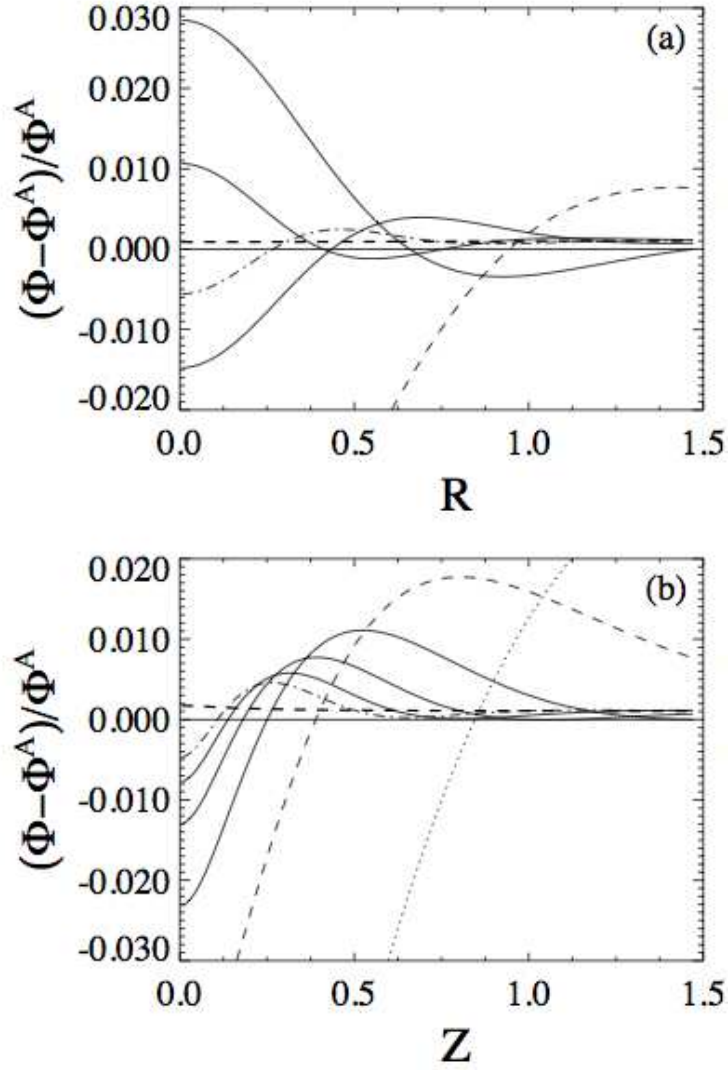


FIGURE 2.6 – Erreur entre le potentiel gravitationnel calculé numériquement via l'équation 2.86 tronquée à différents $l_0 \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et le potentiel exact du sphéroïde en fonction du rayon R : (a) à la surface de l'objet et en fonction de Z : (b) au bord externe. $l_0 = 2$ est représenté par la courbe en tiret jusqu'à $l_0 = 10$ la courbe en tiret-point. Extrait de Cohl and Tohline (1999).

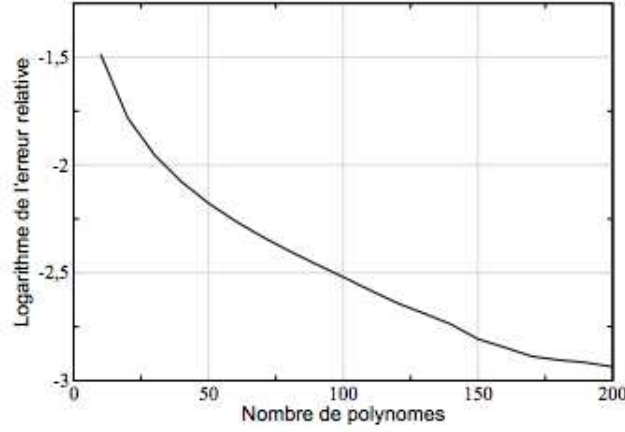


FIGURE 2.7 – Logarithme de l’erreur relative faite en calculant le potentiel gravitationnel dans le plan équatorial d’un disque infiniment mince, avec le développement multipolaire, en fonction de l . Le disque s’étale de $a_{in} = 1$ à $a_{out} = 100$. L’erreur est tracée en fonction du nombre l_0 de termes de la série pris en compte. Extrait de Pierens (2005).

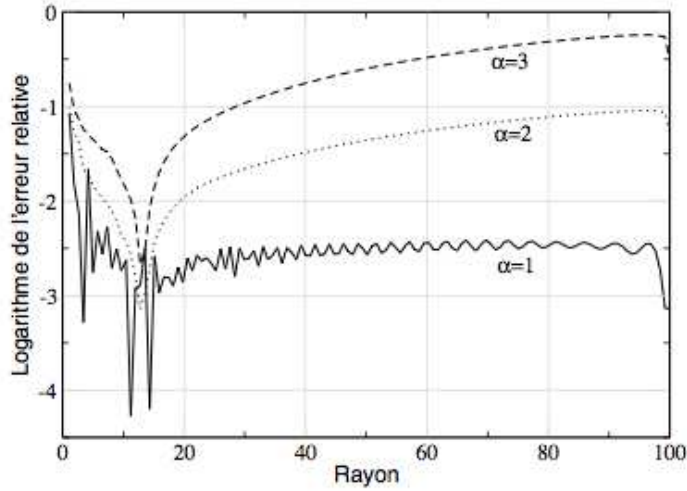


FIGURE 2.8 – Logarithme de l’erreur relative faite en calculant le potentiel gravitationnel dans le plan équatorial de disques infiniments minces de trois profils de densité différents $\Sigma \propto 1/R^\alpha$ avec $\alpha = 1, 2, 3$, avec l’équation 2.90 en fonction du rayon. Extrait de Pierens (2005).

polynômes de Legendre. L’effet de troncature de la série a une incidence significative sur les structures d’équilibre, comme le montre par exemple la figure 2.9 qui représente le rapport de l’énergie cinétique à l’énergie gravitationnelle $T/|W|$ (indicateur de stabilité) en fonction du carré du moment angulaire. On constate pour la séquence binaire une erreur d’un facteur 2 sur la stabilité. Selon le nombre de polynômes (i.e de termes de la série), les séquences d’équilibre sont modifiées et que l’on s’éloignent de la séquence plus

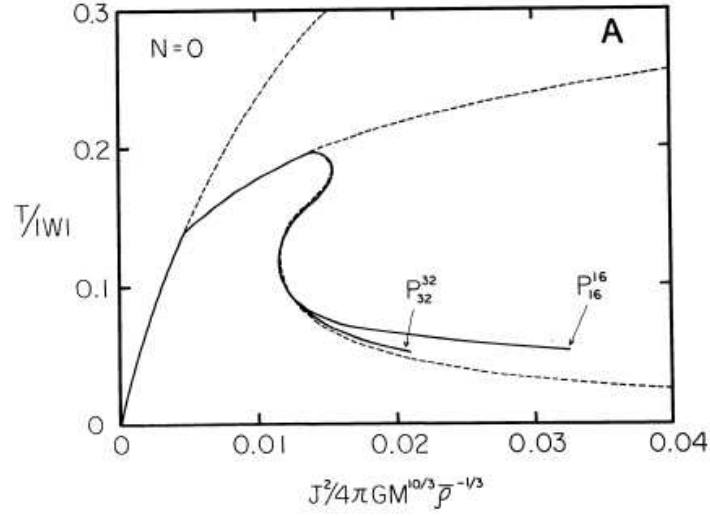


FIGURE 2.9 – Indicateur de stabilité $T/|W|$ en fonction du carré du moment angulaire normalisé ($J^2/4\pi GM^{10/3}\bar{\rho}^{-1/3}$). Les lignes en pointillé représentent la séquence analytique des Maclaurin, des Jacobi et la séquence numérique des binaires. Les symboles P_{16}^{16} et P_{32}^{32} représentent la séquence des binaires calculée en prenant 16 termes de la série pour W et Ψ et 32 termes respectivement ; indice polytropique $n = 0$. Extrait de Hachisu (1986).

précise représentée en pointillé.

3 Conclusion

Utiliser le développement multipolaire a l'avantage de donner une fonction de Green qui ne diverge plus lorsque que l'on veut calculer le potentiel gravitationnel à l'intérieur de l'objet, qu'ils s'agissent d'objets quasi sphériques ou d'objets plats comme les disques. A l'extérieur, l'approche multipolaire est puissante, en effet avec seulement 10 polynôme, on atteint une erreur de 10^{-3} . Cependant, à l'intérieur de la source, ce développement peut générer des erreurs plus ou moins élevées de 10% à 30%, comme nous avons pu le voir sur les figures 2.7 et 2.8. Il faut rajouter que pour effectuer l'intégrale de la fonction de Green, il faut utiliser des schémas de quadrature numérique avec un nombre de points suffisants. Car plus le nombre de points est élevé plus le calcul est précis (voir figure 2.9). Et il est important de réaliser aussi que lorsque l'on veut calculer le potentiel, chaque terme de la série subit une intégrale sur le volume. Ainsi, il y a autant d'intégrales à calculer que de termes. Ceci rend rapidement le calcul assez lourd...

Première partie

Potentiel de disques axi-symétriques :
régularisation de la fonction de Green
et application

Chapitre 3

Approche par les intégrales elliptiques

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| I | Introduction et motivations | 43 |
| 1 | Formule générale | 44 |
| 2 | Cas axi-symétrique | 45 |
| II | Travaux de Bannikova <i>et al.</i> (2011) | 48 |
| 1 | Potentiel gravitationnel externe | 49 |
| 2 | Potentiel gravitationnel interne | 50 |
| 3 | Conclusion | 52 |
| III | Méthode de "double splitting" : travaux de Huré (2005) | 52 |

Comme nous l'avons vu, les développements multipolaires utilisés pour le calcul du potentiel gravitationnel à l'intérieur des sources (étoiles, disques) produisent des erreurs de troncature. Il faut généralement prendre un grand nombre de termes (plusieurs centaines) pour que la précision devienne acceptable (en deçà du pourcent typiquement). Soulignons qu'un nombre important de termes induit une multiplicité du calcul intégral : à chaque terme de la série correspond une intégrale de volume. Il serait intéressant de mettre en place des méthodes permettant d'accélérer la convergence Couch *et al.* (2013).

I Introduction et motivations

Pour les disques qui nous intéressent particulièrement le développement en série de fonctions de Bessel, n'est pas numériquement très confortable (Villumsen, 1985). En effet, l'intervalle d'intégration est infini (voir équation 2.90) et les fonctions sont oscillantes. Une autre voie consiste à utiliser les intégrales elliptiques (définies dans l'Annexe A), qui ont l'avantage d'être définies sur un intervalle fini $[0, 1]$. Cohl and Tohline (1999) utilisent la relation suivante (Watson, 1995) :

$$\int_0^\infty e^{-at} J_m(bt) J_m(ct) dt = \frac{1}{\sqrt{bc}} Q_{m-1/2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \right), \quad (3.1)$$

où Q est la fonction de Legendre associée de deuxième espèce et a, b, c des entiers. Ces fonctions sont liées dans le cas axi-symétrique (i.e $m = 0$) à l'intégrale elliptique complète de première espèce (cf Annexe B). Ils montrent également, dans le cas d'un sphéroïde

homogène oblate (voir section III-1) dont la forme fermée du potentiel est connue, que l'alternative offerte par l'intégrale elliptique est effectivement plus précise. Étudions cette approche.

1 Formule générale

Comme, nous avons pour la séparation relative

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{a^2 + R^2 + (Z - z)^2 - 2aR \cos(\theta' - \theta)}, \\ &= \sqrt{(a + R)^2 + (Z - z)^2 - 2aR(1 + \cos(\theta' - \theta))}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

l'expression 1.13 du potentiel peut se réécrire

$$\Psi(R, \theta, Z) = -G \iiint \frac{\rho(a, \theta', z)a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da d\theta' dz, \quad (3.3)$$

soit,

$$\Psi(R, \theta, Z) = -G \iiint \frac{\rho(a, \theta', z)a}{\sqrt{(a + R)^2 + (Z - z)^2} \sqrt{1 - \frac{2aR(1 + \cos(\theta' - \theta))}{(a + R)^2 + (Z - z)^2}}} da d\theta' dz. \quad (3.4)$$

Nous voyons que le noyau contient explicitement une intégrale elliptique (pour la partie angulaire du moins). Ceci est davantage visible si l'on exprime le champ de densité sous la forme (Huré, 2005; Huré and Pierens, 2005) :

$$\rho(a, \theta', z) = \rho(a, \theta' = \theta, z) + \delta\rho, \quad (3.5)$$

où $\delta\rho = \rho(a, \theta', z) - \rho(a, \theta, z)$ correspond au champ de densité auquel on a soustrait la valeur locale. Dans les conditions de cette séparation azimutale du champ ρ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, \phi) = -G \left\{ \iiint \frac{\rho(a, \theta' = \theta, z)a}{\sqrt{(a + R)^2 + (Z - z)^2} \sqrt{1 - \frac{2aR(1 + \cos(\theta' - \theta))}{(a + R)^2 + (Z - z)^2}}} da d\theta' dz \right. \\ \left. \iiint \frac{\delta\rho a}{\sqrt{(a + R)^2 + (Z - z)^2} \sqrt{1 - \frac{2aR(1 + \cos(\theta' - \theta))}{(a + R)^2 + (Z - z)^2}}} da d\theta' dz \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le second terme de cette équation correspond à une sorte de potentiel résiduel Ψ_{res} , alors que le premier terme, Ψ_0 , représente le potentiel d'une structure telle que $\partial_{\theta'}\rho = 0$, une boucle homogène par exemple. Pour faire apparaître plus explicitement les intégrales elliptiques, nous faisons le changement de variables suivant $\pi - (\theta' - \theta) = 2\beta$ (soit $2d\beta = -d\theta'$). Sachant que $\theta'_1 < \theta' < \theta'_2$, où $\theta'_2 - \theta'_1$ représente l'angle d'ouverture du domaine \mathcal{V} du système étudié, nous avons :

$$2\beta_1 = \pi - (\theta'_1 - \theta), \quad (3.7)$$

et

$$2\beta_2 = \pi - (\theta'_2 - \theta), \quad (3.8)$$

et $1 + \cos(\theta' - \theta) = 1 + \cos(\pi - 2\beta) = 2\sin^2 \beta$. Nous avons donc pour Ψ_0 l'expression suivante :

$$\Psi_0 = 2G \iint \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\rho(a, z)a}{\sqrt{(a+R)^2 + (Z-z)^2} \sqrt{1 - \frac{4aR\sin^2 \beta}{(a+R)^2 + (Z-z)^2}}} da d\beta dz. \quad (3.9)$$

On introduit k , module de l'intégrale elliptique, défini par :

$$k = \frac{2\sqrt{aR}}{\sqrt{(a+R)^2 + (Z-z)^2}} \in [0, 1]. \quad (3.10)$$

En remplaçant k par son expression dans Ψ_0 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= G \iint \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{\rho(a, z)k}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} da d\beta dz, \\ &= G \iint \sqrt{\frac{a}{R}} k \rho(a, z) \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} da d\beta dz, \\ &= -G \iint \sqrt{\frac{a}{R}} k \rho(a, z) \left(\int_0^{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - \int_0^{\beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \right) da d\beta dz. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Les deux intégrales sur β sont connues : il s'agit de l'intégrale elliptique incomplète de première espèce.

$$\mathbf{F}(\beta, k) = \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta. \quad (3.12)$$

Celle-ci est tracée en fonction de β et k sur la figure 3.1. Le potentiel s'exprime donc sous la forme suivante :

$$\Psi = -G \iint \sqrt{\frac{a}{R}} k \rho(a, z) [\mathbf{F}(\beta_1, k) - \mathbf{F}(\beta_2, k)] da dz + \Psi_{res}, \quad (3.13)$$

avec Ψ_{res} qui est le deuxième terme de l'équation 3.6. Ce potentiel résiduel s'annule si $\delta\rho = 0$, c'est à dire si la masse volumique ne dépend pas de θ' . L'avantage de l'équation 3.13, est qu'elle est exacte en tout point de l'objet, à l'intérieur comme à l'extérieur. Son désavantage est qu'elle conserve la divergence initialement présente dans le noyau de Green, ce qui se produit lorsque $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, c'est-à-dire ici lorsque $a = R$, $Z = z$ (i.e $k = 1$) et $\phi = \pi/2$ (voir figure 3.1). Mais elle a une forme asymptotique connue (Gradshteyn and Ryzhik, 1965) :

$$\mathbf{F}(\beta, k) \underset{k \rightarrow 1}{\sim} \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\sqrt{1 - k^2}) \ln \left[\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Lorsque $k \sim 1$, $\mathbf{K}(\sqrt{1 - k^2}) \rightarrow \pi/2$ et $\tan(\pi/2) \rightarrow \infty$, la divergence est logarithmique.

2 Cas axi-symétrique

Sous symétrie axiale, c'est à dire $\rho(a, \theta', z) = \rho(a, \theta' = \theta, z)$, le calcul est plus direct, car précisément l'intégration azimutale est légitime et fait disparaître le potentiel résiduel.

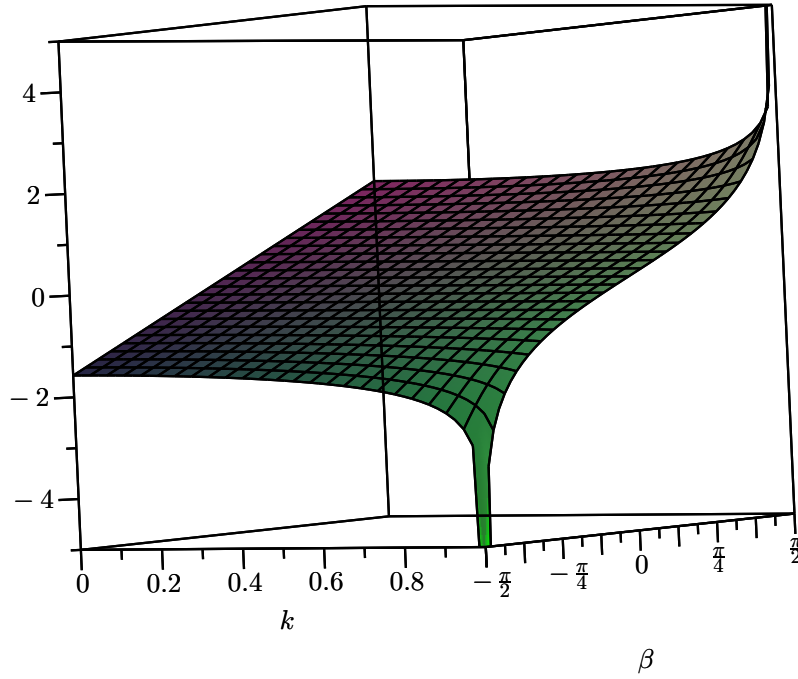


FIGURE 3.1 – Courbe 3D représentant la fonction $\mathbf{F}(\beta, k)$ en fonction de $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $k \in [0, 1]$.

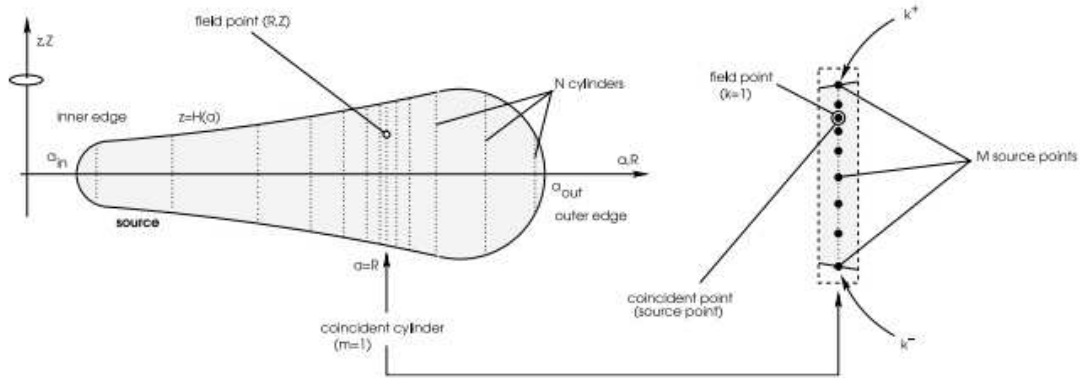


FIGURE 3.2 – Le disque axi-symétrique (gauche) est divisé en N cylindres. Un de ces cylindres, appelé le "cylindre coïncident", contient le point de champ. Sur ce cylindre (droite), un des points source, appelé "point coïncident", coïncide avec le point de champ. En ce point là, $k = 1$ et le noyau de Green est singulier. Extrait de Huré (2005).

Ceci revient à assimiler le système à une collection de cylindres creux infiniment minces, voir pour exemple la figure 3.2. L'axi-symétrie impose que, dans l'équation 3.9, $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 = \pi$. Nous avons alors :

$$\Psi(R, Z) = -2G \iint \int_0^\pi \frac{\rho(a, z)a}{\sqrt{(a+R)^2 + (Z-z)^2} \sqrt{1 - \frac{4aR \sin^2 \beta}{(a+R)^2 + (Z-z)^2}}} da d\beta dz, \quad (3.15)$$

en introduisant k (défini par l'équation 3.10), cela donne :

$$\Psi(R, Z) = -G \iint \rho(a, z) \sqrt{\frac{a}{R}} k \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} da d\beta dz. \quad (3.16)$$

Or nous avons :

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \mathbf{F}\left(k, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.17)$$

où $\mathbf{K}(k)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce (voir définition dans l'Annexe A). Le potentiel gravitationnel d'un disque axi-symétrique (cf figure 3.2) s'exprime donc par l'expression suivante (Durand, 1953) :

$$\Psi(R, Z) = -2G \iint \rho(a, z) \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k) da dz. \quad (3.18)$$

La divergence logarithmique est toujours présente ici. Elle apparaît dans le développement de la fonction $\mathbf{K}(k)$ près de la singularité (Gradshteyn and Ryzhik, 1965) :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) &\underset{k \rightarrow 1}{\sim} \ln 4 - \ln \sqrt{1 - k^2}, \\ &\underset{k \rightarrow 1}{\sim} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln \frac{(a-R)^2 + \zeta^2}{(a+R)^2 + \zeta^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Le développement asymptotique global est donnée dans l'Annexe A. Nous voyons clairement que lorsque $k = 1$ (i.e $a = R$ et $Z = z$), le terme de la fonction \ln s'annule, ce qui fait tendre cette dernière vers l'infini. Cette singularité est aussi nettement visible sur la figure 3.3 où nous avons tracé $k\mathbf{K}(k)$ en fonction de k . La divergence est certes atténuée mais le potentiel reste difficile à calculer numériquement. Suite à l'intégration selon l'azimut, possible grâce à l'axi-symétrie, le noyau de Green a été transformé en la fonction suivante, que l'on appellera noyau de Green axi-symétrique :

$$\Lambda_{axi}(R, Z; a, z) = \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k). \quad (3.20)$$

Il est important de noter que cette fonction $\Lambda_{axi}(R, Z; a, z)$ représente à $-2G$ près, le potentiel d'une boucle homogène de densité linéique égale à l'unité. Le potentiel peut donc se réécrire sous la forme suivante :

$$\Psi(R, Z) = -2G \iint \rho(a, z) \Lambda_{axi}(R, Z; a, z) da dz. \quad (3.21)$$

L'avantage qu'il y a à utiliser l'approche "intégrale elliptique" est que cette dernière possède non seulement un développement asymptotique près de la singularité (i.e $k \rightarrow 1$),

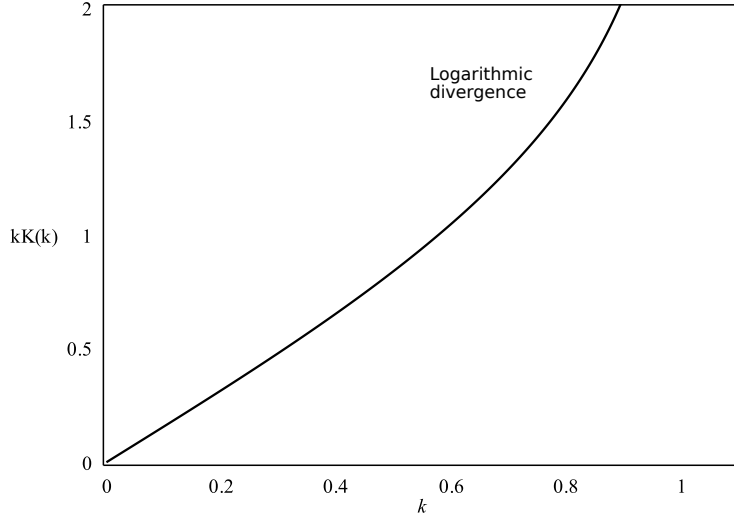


FIGURE 3.3 – Variation de $k\mathbf{K}(k)$ en fonction du module k .

mais aussi un développement en série lorsque k prend des valeurs petites. Il est également possible d’approcher cette fonction par des formes mêlant polynômes et logarithme (e.g. Abramowitz and Stegun, 1970) d’ordres 5 et 7 (cf Annexe A). Notre problématique est maintenant d’intégrer cette fonction Λ_{axi} sur la section méridionale, dans l’espoir de trouver une forme fermée, exacte ou approchée, du potentiel ou tout du moins de régulariser la fonction Λ_{axi} . C’est ce que nous présenterons ultérieurement. Intéressons nous pour le moment au développement de Bannikova *et al.* (2011) qui vise à produire une solution approchée pour les tores circulaires et à la méthode de double splitting Huré (2005), qui donne accès à des solutions numériques de référence dans des cas plus généraux.

II Travaux de Bannikova *et al.* (2011)

Une méthode naturelle consiste à approximer la fonction $\mathbf{K}(k)$ par son développement asymptotique à la singularité (voir équation 3.19). Nous pouvons étudier cette méthode via l’article de Bannikova *et al.* (2011) qui décrit le potentiel gravitationnel d’un tore de section circulaire homogène possédant la symétrie équatoriale (voir figure 3.4). Le potentiel de la boucle étant connu, le potentiel gravitationnel en coordonnées cylindriques en un point P produit par le tore homogène de rayon R_0 est exprimé de la manière suivante :

$$\phi_{torus}(\rho, \zeta) = \frac{GM}{\pi^2 R_t r_0^2} \int_{-r_0}^{+r_0} \int_{-\sqrt{r_0^2 - \eta'^2}}^{\sqrt{r_0^2 - \eta'^2}} \phi_r(\rho, \zeta; \eta', \zeta') d\eta' d\zeta', \quad (3.22)$$

avec

$$\begin{cases} \rho = \frac{R}{R_t}, & \zeta = \frac{Z}{R_t}, \\ \eta' = \frac{a - R_t}{R_t}, & \zeta' = \frac{z}{R_t} \quad r_0 = \frac{R_0}{R_t}, \end{cases} \quad (3.23)$$

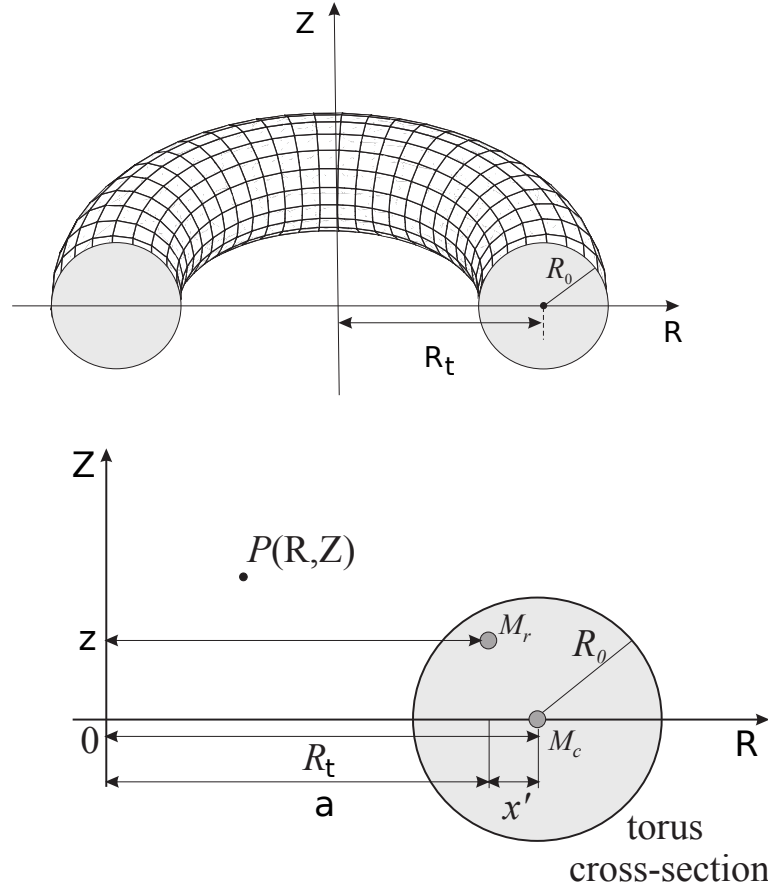


FIGURE 3.4 – Au dessus : schéma 3D d'un tore. En dessous : représentation de la section du tore. Adapté de Bannikova *et al.* (2011).

et

$$\phi_r = \sqrt{\frac{(1 + \eta')k^2}{\rho}} \mathbf{K}(k), \quad (3.24)$$

qui représente le potentiel de la boucle. L'expression donnée par l'équation 3.22 est valide pour tout point de l'espace, à l'intérieur et à l'extérieur de la distribution, cependant comme il ne s'agit que d'une reformulation de l'équation 3.21, son intégrande diverge. Afin d'obtenir une forme fermée, les auteurs ont découpé le potentiel en un potentiel externe (le point $P(R, Z)$ qui se situe à l'extérieur du tore, $(\rho - 1)^2 + \zeta^2 > r_0^2$) et un potentiel interne $((\rho - 1)^2 + \zeta^2 \leq r_0^2)$.

1 Potentiel gravitationnel externe

Le potentiel gravitationnel externe est approché par un développement en série de Maclaurin au deuxième ordre autour du point de coordonnées $(\eta' = 0, \zeta' = 0)$, c'est à dire le centre du tore. Il est donné par la fonction suivante :

$$\phi_{torus}^{ext}(\rho, \zeta; r_0) \approx \frac{GM}{\pi R_t} \sqrt{\frac{R_t k^2}{x}} \mathbf{K}(k) \left[1 - \frac{r_0^2}{16} + \frac{r_0^2}{16} S(\rho, \zeta) \right], \quad (3.25)$$

avec

$$S(\rho, \zeta) \approx \frac{\rho^2 + \zeta^2 - 1}{(\rho + 1)^2 + \zeta^2} \frac{\mathbf{E}(k)}{\mathbf{K}(k)}, \quad (3.26)$$

avec la valeur de k prise en $(\eta' = 0, \zeta' = 0)$. L'approximation donnée par l'équation 3.25

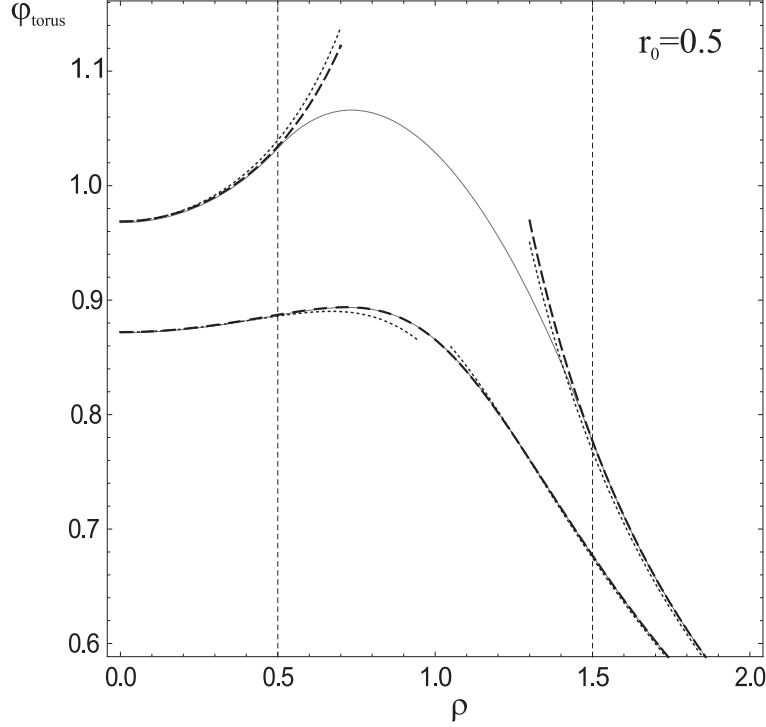


FIGURE 3.5 – Variation du potentiel en fonction de ρ pour un tore circulaire de paramètre $r_0 = 0.5$, $\zeta = 0$ (courbe du dessus) et $\zeta = 0.5$ (courbe du dessous). Le potentiel de référence, calculé avec l'équation 3.22, est en trait plein et son approximation, calculée avec l'équation 3.25, est en tiret. $G = 1, R_t = 1$ et $M = 1$ pour toutes les applications numériques. Les traits verticaux représentent les bords interne et externe du tore. Extrait de Bannikova *et al.* (2011).

est comparée au potentiel de référence donnée par l'équation 3.22 sur la figure 3.5, pour un tore circulaire de paramètres $r_0 = 0.5$ et $\zeta = 0$ (dans le plan médian) pour la courbe du dessus et $\zeta = 0.5$ (au dessus du tore) pour la courbe du dessous. Nous voyons que le potentiel est bien approché à l'extérieur du tore, autant en $\zeta = 0$ qu'en $\zeta = 0.5$. L'erreur n'excède pas 0.2%. Il ne faut ici s'intéresser qu'à ce qui se passe en dehors des traits verticaux pour la courbe $\zeta = 0$. La partie à l'intérieur de ce trait se situe à l'intérieur du tore et donc l'équation 3.25 n'y est pas valable.

2 Potentiel gravitationnel interne

C'est dans cette partie que l'on voit apparaître le développement de la fonction $\mathbf{K}(k)$ autour de la singularité. Comme nous l'avons déjà dit, à l'intérieur du système, la fonction $\mathbf{K}(k)$ diverge. Le développement, à l'ordre 2 de l'intégrale complète de première espèce

autour de la singularité s'écrit :

$$\mathbf{K}(k) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{k'^2}} + \frac{k'^2}{4} \ln \frac{4}{e\sqrt{k'^2}}, \quad (3.27)$$

avec $k^2 = 1 - k'^2$. Après avoir fait l'hypothèse $r_0 \ll 1$ (c'est à dire se placer dans le cas de tores de petites sections), le potentiel gravitationnel d'un point $P(R, Z)$ situé à l'intérieur du tore (i.e $(\rho - 1)^2 + \zeta^2 \leq r_0^2$), dû à la distribution homogène est donné par la formule suivante :

$$\phi_{torus}^{int} \approx \frac{GM}{2\pi R_t} \left[c + a_1 \frac{\eta}{r_0} + a_2 \left(\frac{\eta}{r_0} \right)^2 + b_2 \left(\frac{\zeta}{r_0} \right)^2 \right], \quad (3.28)$$

avec

$$\begin{cases} c = 1 + 2 \left(\frac{r_0}{8} \right)^2 - 2 \ln \left(\frac{r_0}{8} \right) + 8 \left(\frac{r_0}{8} \right)^2 \ln \left(\frac{r_0}{8} \right), & a_1 = 8 \left(\frac{r_0}{8} \right) \left[1 + \ln \left(\frac{r_0}{8} \right) \right], \\ a_2 = -1 - 4 \left(\frac{r_0}{8} \right)^2 \left[11 + 10 \ln \left(\frac{r_0}{8} \right) \right], & b_2 = -1 + 4 \left(\frac{r_0}{8} \right)^2 \left[3 + 2 \left(\frac{r_0}{8} \right) \right]. \end{cases} \quad (3.29)$$

L'approximation donnée par l'équation 3.28 est comparée au potentiel de référence donnée

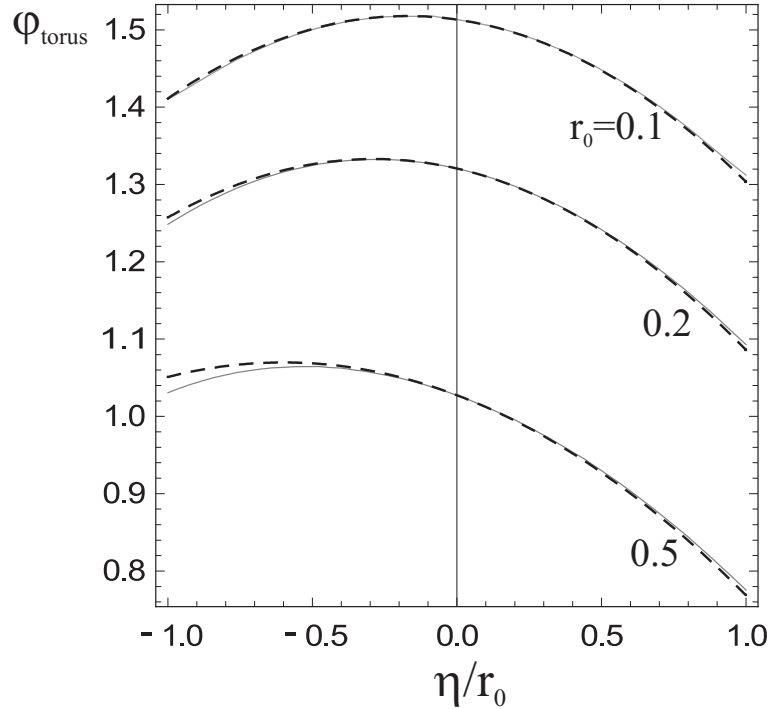


FIGURE 3.6 – Variation du potentiel interne pour un tore circulaire de paramètres $r_0 = 0.1$ (courbe du dessus), $r_0 = 0.2$ (courbe du milieu), $r_0 = 0.5$ (courbe du dessous) et $\zeta = 0$. Le potentiel de référence, calculé avec l'équation 3.22, est en trait plein et son approximation, calculée avec l'équation 3.28, est en tiret. Extrait de Bannikova *et al.* (2011).

par l'équation 3.22 sur la figure 3.6 pour trois tores circulaires de paramètres $r_0 = 0.1$ (courbe du dessus), $r_0 = 0.2$ (courbe du milieu), $r_0 = 0.5$ (courbe du dessous) et $\zeta = 0$.

Nous pouvons voir que le potentiel du tore est bien approché quelque soit r_0 , la différence entre les deux courbes étant très faible, avec une erreur maximale de 2% (valeur près de la surface).

3 Conclusion

L'approximation donnée dans cet article permet d'exprimer le potentiel sous une forme algébrique, ce qui est intéressant d'un point de vue numérique étant donné que plus aucune intégrale doit être calculée. Comme nous avons pu voir sur les différentes courbes présentées, celle-ci reproduit correctement le potentiel gravitationnel du tore autant à l'intérieur qu'à l'extérieur. Nous remarquons également qu'à l'intérieur le potentiel est exprimé, non plus à l'aide de fonctions spéciales (parfois divergentes), mais à l'aide de fonctions simples régulières. Cette expression reste toutefois une approximation valable : i) seulement pour des tores homogènes de petites section ($r_0 \ll 1$), ii) pour des tores strictement circulaires. Ces deux hypothèses sont assez restrictives si l'on veut étudier des objets astrophysiques réalistes.

III Méthode de "double splitting" : travaux de Huré (2005)

Une approche davantage tournée vers le calcul numérique est la méthode de "double splitting" (Huré, 2005), qui reprend la séparation du champ de densité en deux composantes mais sépare aussi la fonction Λ_{axi} (équation 3.20) en deux parties : $\ln k'$ pour la partie divergente et \mathbf{K}_{reg} pour la partie résiduelle régulière. C'est donc une double séparation :

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}_{\text{reg}}(k) - \ln k', \quad (3.30)$$

où $\mathbf{K}_{\text{reg}}(k)$ est donc la partie régulière de \mathbf{K} et $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Cette fonction est tracée

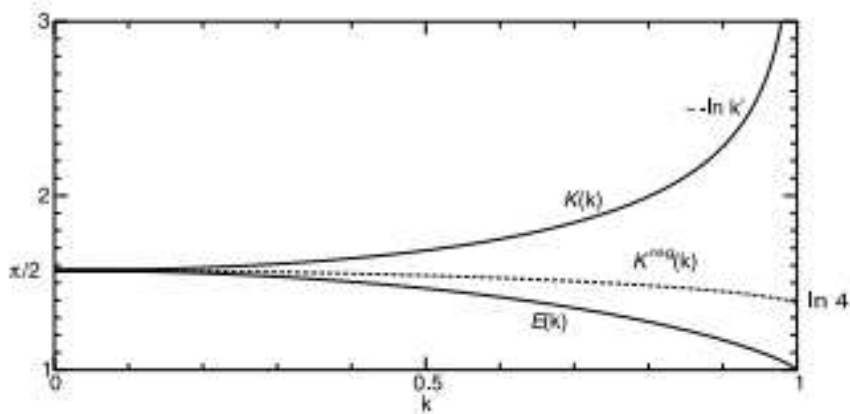


FIGURE 3.7 – Intégrales elliptiques complètes $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{E}(k)$ et l'intégrale elliptique complète "régulière" de première espèce \mathbf{K}_{reg} définie par l'équation 3.30, en fonction de leur module k . Extrait de Huré (2005).

sur la figure 3.7 en fonction de k . L'équation 3.21 devient :

$$\Psi(R, Z) = \Psi^{reg}(R, Z) + \Psi^{sin}(R, Z), \quad (3.31)$$

où

$$\begin{cases} \Psi^{reg}(R, Z) = -2G \int_{a_{in}}^{a_{out}} \sqrt{\frac{a}{R}} \int_{z_-}^{z_+} k \mathbf{K}_{reg}(k) \rho(a, z) dz da, \\ \Psi^{sin}(R, Z) = 2G \int_{a_{in}}^{a_{out}} \sqrt{\frac{a}{R}} \int_{z_-}^{z_+} k \ln k' \rho(a, z) dz da. \end{cases} \quad (3.32)$$

L'intégrande de $\Psi^{reg}(R, Z)$ est totalement régulière en tout point de l'espace. Cette intégrale peut donc être calculée avec un simple schéma numérique, tel que la méthode des trapèzes. La seconde intégrale Ψ^{sin} , elle, par contre reste singulière. En effet lorsque $k = 1$, $k' = 0$ et donc la fonction \ln diverge. Un deuxième "splitting" sur la densité est donc mis en place. Il opère seulement sur Ψ^{sin}

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(a, z) = \rho(a, z)k, \\ \tilde{\rho}(a, z) = \tilde{\rho}|_{k=m} + \delta\tilde{\rho}(a, z). \end{cases} \quad (3.33)$$

$\tilde{\rho}|_{k=m}$ est la valeur de $\rho(a, z)k$ en $Z = z$. Il n'y a donc plus de dépendance en z de $\tilde{\rho}|_{k=m}$. Ce qui nous donne pour Ψ^{sin} , l'expression suivante :

$$\Psi^{sin} = -2G \left\{ \int_{a_{in}}^{a_{out}} \sqrt{\frac{a}{R}} \tilde{\rho}|_{k=m} \int_{z_-}^{z_+} \ln k' dz da - \int_{a_{in}}^{a_{out}} \sqrt{\frac{a}{R}} \int_{z_-}^{z_+} \delta\tilde{\rho} \ln k' dz dz \right\}. \quad (3.34)$$

La première intégrale de l'équation 3.34 peut facilement se calculer numériquement, du au fait qu'elle devient totalement régulière parce que l'intégrale en z de la fonction $\ln k'$ est connue et vaut (Gradshteyn and Ryzhik, 1965) :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \ln k' dz &= \frac{1}{2} \int_{z_-}^{z_+} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z-z)^2}{(a+R)^2 + (Z-z)^2} dz, \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (Z-h) \ln k'_+{}^2 - (Z+h) \ln k'_-{}^2 + 2 \left[(a-R) \left(\arctan \frac{Z-h}{a-R} - \arctan \frac{Z+h}{a-R} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (a+R) \left(\arctan \frac{Z-h}{a+R} - \arctan \frac{Z+h}{a+R} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

où

$$k'_{\pm} = \sqrt{\frac{(a-R)^2 + (Z \mp h)^2}{(a+R)^2 + (Z \mp h)^2}}. \quad (3.36)$$

et $z_- = -h$ et $z_+ = h$. La deuxième intégrale de l'équation 3.34 est elle aussi totalement régulière car par construction, lorsque $k = 1$ (i.e, $k' = 0$), $\delta\tilde{\rho}(a, z) = 0$. Et comme la divergence est logarithmique $\delta\tilde{\rho}(a, z) \ln k' = 0$. Cette méthode de "double splitting" permet donc de régulariser les intégrandes et donc de rendre le calcul numérique plus simple. L'erreur faite sur le potentiel gravitationnel via le "double splitting" est calculée via l'équation suivante :

$$\epsilon = \frac{\Psi - \Psi^{ref}}{\Psi^{ref}}, \quad (3.37)$$

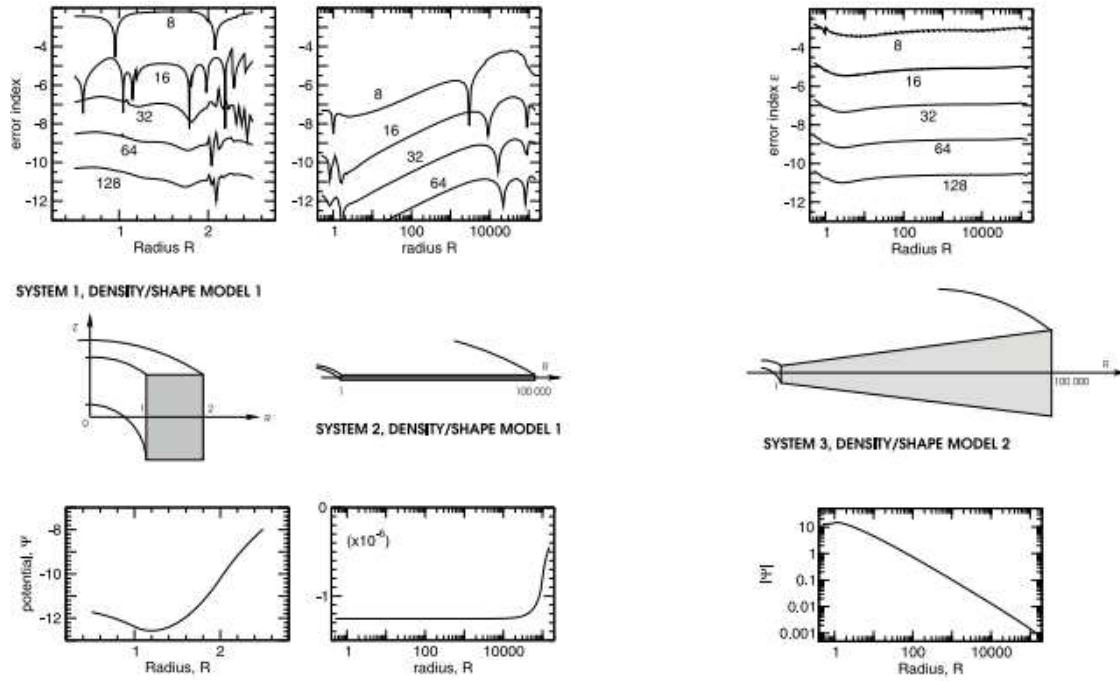


FIGURE 3.8 – Erreur produite sur le calcul du potentiel gravitationnel avec les méthodes de "double splitting" (courbes du dessus) pour 3 modèles de disques définis par la table 3.1 et représentés par les schémas du milieu. L'erreur est calculée pour des résolutions verticales différentes 8, 16, 32, 64, 128 points. Les courbes du dessous représentent le potentiel calculé à l'altitude $Z = h/2$ en fonction du rayon pour les trois modèles. Extrait de Huré (2005).

Systèmes Propriétés

- | | |
|---|---|
| 1 | un disque épais (i.e $h \sim a_{out}$) avec $a_{in} = 1$, $a_{out} = 2$ et $h = 1$ |
| 2 | un disque mince (i.e $h \ll a_{out}$) avec $a_{in} = 1$, $a_{out} = 10^5$ et $h = 1$ |
| 3 | un disque réaliste avec $h \propto a$ et $\rho \propto 1/a^2$ avec $a_{in} = 1$, $a_{out} = 10^5$ et $h/a = 0.1$ |

TABLE 3.1 – Trois modèles de disques. Extrait de Huré (2005).

où Ψ est le potentiel calculé via le "double splitting" et Ψ^{ref} est le potentiel calculé avec la même méthode mais avec une résolution plus grande. Cette erreur est calculée pour trois modèles de disques définis dans la table 3.1. Nous pouvons voir sur la figure 3.8 que ϵ est faible même pour de petites résolutions (8 ou 16 points), de l'ordre de $10^{-3} \sim 10^{-4}$. Cette méthode a l'avantage aussi de ne pas dégrader le noyau de Green par une approximation quelconque et d'être valable pour n'importe quel profil de densité et n'importe quelle forme d'objet. Sa grande précision permet de générer des solutions de référence (c'est ce que nous utiliserons par la suite). Toutefois, elle a le désavantage de nécessiter une implémentation numérique conséquente voire lourde.

Chapitre 4

Régularisation de la fonction de Green axi-symétrique

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Régularisation du noyau de Green axi-symétrique par intégration analytique | 56 |
| 1 | Hypothèse d'homogénéité verticale de la densité | 56 |
| 2 | Contournement de la singularité | 57 |
| 3 | Nouvelle formulation pour la fonction de Green axi-symétrique moyenne (GAM) | 59 |
| 4 | Analyse numérique des deux composantes de la fonction GAM | 60 |
| 5 | Expression et comportement à longue distance du potentiel gravitationnel de systèmes axi-symétriques | 63 |
| II | Tests numériques | 65 |
| 1 | Étude de la fonction GAM | 65 |
| 2 | Analyse du potentiel gravitationnel exprimé via la fonction GAM | 67 |
| III | Influence d'une stratification verticale | 71 |
| 1 | Effet sur la fonction GAM | 71 |
| 2 | Effet sur le potentiel gravitationnel | 72 |
| IV | Comparaison avec Bannikova <i>et al.</i> (2011) | 74 |
| 1 | Potentiel gravitationnel externe | 76 |
| 2 | Potentiel gravitationnel interne | 76 |
| V | Conclusion | 77 |

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que le principal problème d'estimation du potentiel gravitationnel d'un objet céleste par intégration provient du noyau de Green. Nous avons vu que l'hypothèse de symétrie axiale permet de transformer la singularité hyperbolique en une singularité logarithmique. En fait, toute intégration du noyau de Newton dans une direction produit ce type de résultat. Ici, nous allons plus loin en régularisant complètement le noyau axi-symétrique Λ_{axi} par une intégration supplémentaire dans la direction **verticale** (i.e. perpendiculaire au plan équatorial du disque), ceci revient en fait à calculer une fonction de Green Axi-symétrique Moyennée verticalement (ou GAM). Dans ce chapitre, nous établissons donc ce résultat et expliquons sa mise en œuvre à travers quelques exemples académiques (tores de section rectangulaire, circulaire

et ellipsoïdale...) et traçons également quelques cartes de potentiel pour différents objets d'intérêt astrophysique. Nous comparons ensuite cette approche avec celle de Bannikova *et al.* (2011) et à celle d'Huré (2005) que nous avons décrites dans le chapitre précédent. Nos hypothèses sont les suivantes. Nous considérons un système à symétrie axiale comme celui représenté sur la figure 4.1 et nous travaillons en coordonnées cylindriques. Le potentiel gravitationnel, $\Psi(R, Z)$, de ce système de masse volumique $\rho(a, z)$ (indépendante de l'angle azimutal) est donné par une intégrale de surface, (voir équation 3.21 chapitre 3, section I).

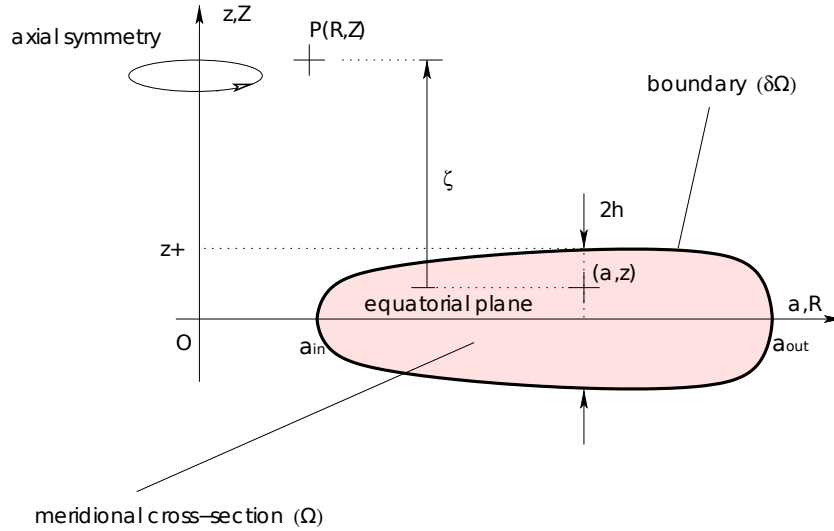


FIGURE 4.1 – Configuration typique d'un disque axi-symétrique auto-gravitant (taille et masse finies, et d'épaisseur locale $2h$) et les notations associées en coordonnées cylindriques.

I Régularisation du noyau de Green axi-symétrique par intégration analytique

Notre objectif est de régulariser la fonction Λ_{axi} , par une intégration directe dans la direction verticale (Trova *et al.*, 2012). Dans le contexte des disques astrophysiques, l'équation de la surface de l'objet est généralement une bijection du rayon, c'est-à-dire une équation de la forme $z_{\pm} = z_{\pm}(a)$ (où z_{+} correspond à la surface au dessus du plan médian et z_{-} en dessous du plan médian). Ceci permet de découpler le calcul et de d'abord effectuer l'intégrale en z puis l'intégrale en a . Cette approche est notamment compatible avec les modèles de disques géométriquement minces et des anneaux dans lesquels les structures radiales et verticales sont découplées (Shakura and Sunyaev, 1973; Pringle, 1981). C'est donc l'approche que nous utilisons par la suite.

1 Hypothèse d'homogénéité verticale de la densité

Afin de pouvoir procéder à cette intégration verticale, nous devons imposer que la masse volumique ρ ne dépend pas de z mais varie seulement en fonction du

rayon a . L'équation 3.21 peut se réécrire de la manière suivante :

$$\Psi(R, Z) = -G \int_a \rho(a) \left(\int_z 2\sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k) dz \right) da. \quad (4.1)$$

Soulignons que la double intégrale de l'équation 4.1 n'a a priori pas de forme algébrique connue. Réécrivons 4.1 sous la forme suivante :

$$\Psi(R, Z) = -G \int_a \mathcal{G}[R, Z; a, z_{\pm}(a)] \Sigma(a) da, \quad (4.2)$$

où

$$\Sigma(a) = \int_z \rho(a) dz, \quad (4.3)$$

est la densité surfacique totale du disque, et

$$\mathcal{G} = \int_z 2\sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k) dz / \int_z dz, \quad (4.4)$$

est la **fonction de Green axi-symétrique moyenne**, appelée **GAM** par la suite. Il semble que cette intégrale n'ait pas de forme algébrique connue mais seulement un développement en série infinie dont la convergence est faible (Durand, 1953).

2 Contournement de la singularité

L'absence de forme algébrique est problématique dans la plupart des applications théoriques et numériques. Le noyau de 4.2 est toujours logarithmiquement divergent lorsque $k \rightarrow 1$. Cependant, grâce à différentes relations entre les intégrales elliptiques complètes de première, deuxième et troisième espèces, \mathbf{K} , \mathbf{E} et $\mathbf{\Pi}$ respectivement (voir Annexe A pour leur définition), il est possible de réécrire la fonction GAM sous une forme bien plus commode. La démonstration que nous donnons ici requiert les dérivées de \mathbf{K} et $\mathbf{\Pi}$ par rapport à z (ou à ζ). Comme le paramètre m^2 défini par ¹

$$m = 2 \frac{\sqrt{aR}}{(a + R)} \quad (4.5)$$

ne dépend pas de z , nous avons (Gradshteyn and Ryzhik, 1965) :

$$\frac{\partial k}{\partial \zeta} = \frac{1}{\zeta} \frac{k(k^2 - m^2)}{m^2} \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}(k)}{\partial \zeta} = \frac{\partial k}{\partial \zeta} \frac{\partial \mathbf{K}(k)}{\partial k} = \frac{\partial k}{\partial \zeta} \frac{1}{k} \left[\frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} - \mathbf{K}(k) \right], \quad (4.6b)$$

Comme m^2 ne dépend pas de ζ ,

$$\frac{\partial \mathbf{\Pi}(m^2, k)}{\partial \zeta} = \frac{\partial k}{\partial \zeta} \frac{\partial \mathbf{\Pi}(m^2, k)}{\partial k} = \frac{\partial k}{\partial \zeta} \frac{k}{k^2 - m^2} \left[\mathbf{\Pi}(m^2, k) - \frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} \right]. \quad (4.6c)$$

1. Notons au passage que $m \rightarrow k$ quand $\zeta \rightarrow 0$ et $0 \leq k \leq m \leq 1$. En effet lorsque $k = 1$ (i.e $a = R$ et $\zeta = 0$ simultanément), m vaut forcément l'unité. Mais le contraire n'est pas vrai $m = 1$ n'implique pas $k = 1$.

Intéressons nous aux deux fonctions $\zeta^n k^p \mathbf{K}(k)$ et $\zeta^n k^p \mathbf{\Pi}(m^2, k)$ pour n et p entiers quelconques et calculons leurs dérivées par rapport à ζ . Si nous développons notre calcul pour la première fonction, nous avons :

$$\partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{K}(k) = k^p \mathbf{K}(k) n \zeta^{n-1} + \zeta^n \mathbf{K}(k) p k^{p-1} \frac{\partial k}{\partial \zeta} + \zeta^n k^p \frac{\partial \mathbf{K}(k)}{\partial k}. \quad (4.7)$$

En injectant 4.6a et 4.6b dans l'équation précédente nous obtenons :

$$\begin{aligned} \partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{K}(k) = & k^p \mathbf{K}(k) n \zeta^{n-1} + \zeta^n \mathbf{K}(k) p k^{p-1} \frac{k(k^2 - m^2)}{\zeta m^2} \\ & + \zeta^n k^p \frac{(k^2 - m^2)}{\zeta m^2} \left(\frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} - \mathbf{K}(k) \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

soit,

$$\begin{aligned} \partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{K}(k) = & n \zeta^{n-1} k^p \mathbf{K}(k) + \frac{\zeta^{n-1} k^p}{m^2} p (k^2 - m^2) \mathbf{K}(k) \\ & + \frac{\zeta^{n-1} k^p}{m^2} (k^2 - m^2) \left[\frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} - \mathbf{K}(k) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

En factorisant par $\zeta^{n-1} k^p / m^2$ et en réarrangeant les termes, nous avons :

$$\partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{K}(k) = \frac{\zeta^{n-1} k^p}{m^2} \left\{ [m^2(n - p + 1) + k^2(p - 1)] \mathbf{K}(k) + [k^2 - m^2] \frac{\mathbf{E}(k)}{m'^2} \right\}. \quad (4.10)$$

Nous faisons de même avec une seconde relation, impliquant $\mathbf{\Pi}(m^2, k)$.

$$\partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{\Pi}(m^2, k) = k^p \mathbf{\Pi}(m^2, k) n \zeta^{n-1} + \zeta^n \mathbf{\Pi}(m^2, k) p k^{p-1} \frac{\partial k}{\partial \zeta} + \zeta^n k^p \frac{\partial \mathbf{\Pi}(m^2, k)}{\partial \zeta}. \quad (4.11)$$

En injectant cette fois-ci les équations 4.6a et 4.6c, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{\Pi}(m^2, k) = & k^p \mathbf{\Pi}(m^2, k) n \zeta^{n-1} + \zeta^n \mathbf{\Pi}(m^2, k) p k^{p-1} \frac{k(k^2 - m^2)}{\zeta m^2} \\ & - \zeta^n k^p \frac{k^2}{\zeta m^2} \left(\mathbf{\Pi}(m^2, k) - \frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

En factorisant de nouveau par $\zeta^{n-1} k^p / m^2$ et en réarrangeant l'équation précédente, nous avons :

$$\partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{\Pi}(m^2, k) = \frac{\zeta^{n-1} k^p}{m^2} \left\{ \mathbf{\Pi}(m^2, k) [m^2(n - p) + k^2(p - 1)] + \frac{k^2}{k'^2} \mathbf{E}(k) \right\}. \quad (4.13)$$

Nous avons donc établi les deux formules suivantes, qui sont valides pour tout entiers n et p :

$$\boxed{\partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{K}(k) = \frac{\zeta^{n-1} k^p}{m^2} \left\{ [(n - p + 1)m^2 + (p - 1)k^2] \mathbf{K}(k) + [k^2 - m^2] \frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} \right\}}, \quad (4.14)$$

$$\boxed{\partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{\Pi}(m^2, k) = \frac{\zeta^{n-1} k^p}{m^2} \left\{ [(n - p)m^2 + (p - 1)k^2] \mathbf{\Pi}(m^2, k) + k^2 \frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} \right\}}. \quad (4.15)$$

Maintenant, si nous combinons les deux formules précédentes en multipliant la deuxième équation par $m'^2 = 1 - m^2$, nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{K}(k) - m'^2 \partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{\Pi}(m^2, k) &= \frac{\zeta^{n-1} k^p}{m^2} \times \left\{ [(n-p+1)m^2 + (p-1)k^2] \mathbf{K}(k) \right. \\ &\quad \left. - m'^2 [(n-p)m^2 + (p-1)k^2] \mathbf{\Pi}(m^2, k) - [k^2 - m^2 - m'^2 k^2] \frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Or

$$k^2 - m^2 - m'^2 k^2 = -m'^2 k'^2, \quad (4.17)$$

ce qui implique

$$\boxed{\partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{K}(k) - m'^2 \partial_\zeta \zeta^n k^p \mathbf{\Pi}(m^2, k) = \frac{\zeta^{n-1} k^p}{m^2} \times \left\{ [(n-p+1)m^2 + (p-1)k^2] \mathbf{K}(k) - m'^2 [(n-p)m^2 + (p-1)k^2] \mathbf{\Pi}(m^2, k) - m^2 \mathbf{E}(k) \right\}.} \quad (4.18)$$

Nous remarquons que pour $n = 1$ et $p = 1$, l'intégrale elliptique complète de troisième espèce $\mathbf{\Pi}$ disparaît du côté droit de l'équation 4.18. Nous avons donc :

$$\partial_\zeta \zeta k \mathbf{K}(k) - m'^2 \partial_\zeta \zeta k \mathbf{\Pi}(k) = k \mathbf{K}(k) - k \mathbf{E}(k). \quad (4.19)$$

Comme m ne dépend pas de l'altitude ζ et m' non plus, nous pouvons le faire sortir de la dérivée et écrire la relation suivante :

$$\partial_\zeta \left\{ \zeta \left[k \mathbf{K}(k) - m'^2 k \mathbf{\Pi}(k) \right] \right\} = k \mathbf{K}(k) - k \mathbf{E}(k). \quad (4.20)$$

Finalement, en remarquant que $d\zeta = -dz$, nous avons le résultat :

$$\boxed{\int k \mathbf{K}(k) dz = \int k \mathbf{E}(k) dz - \zeta \mathbf{H}(m, k),} \quad (4.21)$$

où \mathbf{H} est définie par :

$$\mathbf{H}(m, k) = k \left[\mathbf{K}(k) - m'^2 \mathbf{\Pi}(m^2, k) \right]. \quad (4.22)$$

Nous reconnaissons dans le terme de gauche de l'équation 4.21, l'expression présente dans notre fonction GAM de l'équation 4.4. Nous pouvons donc la remplacer par le terme de droite et obtenir une nouvelle forme de la fonction GAM. Ce résultat est exact, il n'y a aucune approximation.

3 Nouvelle formulation pour la fonction de Green axi-symétrique moyenne (GAM)

En insérant l'équation 4.21 dans l'équation 4.4, nous avons une nouvelle formulation de la GAM pour les systèmes verticalement homogènes données par :

$$\mathcal{G}(R, Z; a, z_\pm) = \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{1}{h} \left[\int_{z_-}^{z_+} k \mathbf{E}(k) dz - \zeta_+ \mathbf{H}(m, k_+) + \zeta_- \mathbf{H}(m, k_-) \right], \quad (4.23)$$

avec

$$k_{\pm} = \frac{2\sqrt{aR}}{\sqrt{(a+R)^2 + \zeta_{\pm}^2}}, \quad (4.24)$$

et $\zeta_{\pm} = Z - z_{\pm}$ qui peut être éventuellement une fonction de a (le signe $+$ et $-$ correspond, respectivement, à la surface au dessus et au dessous du plan médian) et

$$2h = z_+ - z_-, \quad (4.25)$$

où h est une fonction de a et représente la demi-épaisseur. La valeur maximale de la fonction GAM se situe en $R = a$ et vaut :

$$\mathcal{G}_{\max.} \equiv \mathcal{G}(R, Z; a = R, z_{\pm}) = \frac{1}{h(R)} \left[\int_{z_-}^{z_+} k \mathbf{E}(k) dz - \zeta_+ k_+ \mathbf{K}(k_+) + \zeta_- k_- \mathbf{K}(k_-) \right], \quad (4.26)$$

où $k = 2R/\sqrt{4R^2 + \zeta^2}$ et $k_{\pm} = 2R/\sqrt{4R^2 + \zeta_{\pm}^2}$. La seule hypothèse faite ici, est sur l'homogénéité verticale de la densité. Aucune hypothèse n'a été faite sur la forme de l'objet. Cette fonction GAM est donc utilisable pour toutes formes d'objets axi-symétriques verticalement homogènes. La question que l'on peut maintenant se poser est : en quoi est-elle plus performante ?

4 Analyse numérique des deux composantes de la fonction GAM

Voyons en quoi cette nouvelle formule est intéressante. Analysons les deux termes de la GAM.

4-1 Étude de $\int_z k \mathbf{E}(k) dz$

Le premier terme à droite de l'équation 4.21, $k \mathbf{E}(k)$, est totalement régulier, plus aucune divergence n'apparaît. Cette fonction est tracée sur la figure 4.2. Nous pouvons

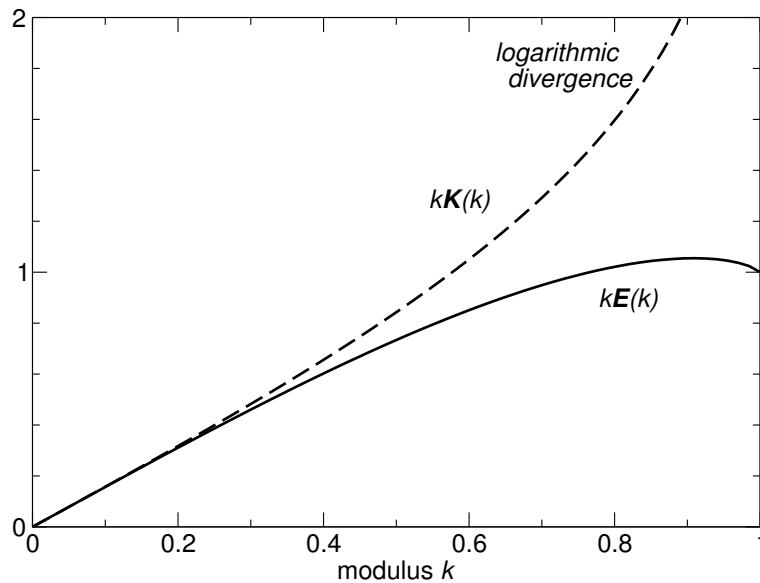


FIGURE 4.2 – Variation de $k \mathbf{K}(k)$ et $k \mathbf{E}(k)$ en fonction du module k .

remarquer qu'en comparaison au noyau initial $k\mathbf{K}(k)$, la fonction $k\mathbf{E}(k)$ ne contient aucune singularité $\forall k \in [0, 1]$. Comme \mathbf{K} , \mathbf{E} a des développements asymptotiques connus Gradshteyn and Ryzhik (1965), autant lorsque $k \rightarrow 1$ que lorsque $k \sim 1$, et aussi deux approximations polynomiales (e.g. Abramowitz and Stegun, 1970) d'ordre 5 et 7. Tous ces développements et approximations sont donnés dans l'Annexe A. Une question importante à laquelle nous avons tenté de répondre est la suivante : existe-t-il une forme fermée pour cette intégrale ? L'existence d'une telle expression pour $\int_z k\mathbf{E}(k) dz$ pourrait nous permettre d'exprimer le potentiel d'un système tri-dimensionnel verticalement homogène et à symétrie axiale à l'aide d'une intégrale à une dimension. Nous avons exploré différentes voies mais cependant sans succès. Nous avons par exemple, réécrit $k\mathbf{E}(k)$ sous la forme d'une série infinie sur k , ou encore nous avons considéré $\mathbf{E}(k)$ comme une intégrale sur θ et intégré termes par termes comme il a été fait dans Cvijović and Klinowski (1994). Cependant, aucune de ces deux approches ne nous a donné de résultats concluants. La connaissance de cette intégrale donnerait accès à la formule du potentiel d'un cylindre creux de taille fini, a priori inconnue à ce jour. Soulignons que l'intégrale $\int_z k\mathbf{E}(k) dz = -\int_\zeta k\mathbf{E}(k) d\zeta$ peut être convertie en l'intégrale suivante :

$$\int_\zeta k\mathbf{E}(k) d\zeta = \pm \frac{4aR}{a+R} \int \frac{\mathbf{E}(k) dk}{k\sqrt{m^2 - k^2}}, \quad (4.27)$$

où $\pm = |\zeta|/\zeta$. La forme fermée de l'intégrale de l'équation 4.27 n'est connue que pour $m = 1$ c'est à dire $a = R$, ce qui est beaucoup trop restrictif.

4-2 Étude de $\mathbf{H}(m, k)$

Le second terme de la fonction GAM, $\zeta\mathbf{H}(m, k)$, est aussi totalement régulier. En effet, nous remarquons la présence, dans la fonction $\zeta\mathbf{H}(m, mx)$, des fonctions $\mathbf{K}(mx)$ et $\mathbf{\Pi}(m^2, mx)$ qui divergent lorsque $x = 1$ et $m = 1$. Mais cette divergence est annulée par la présence des facteurs ζ et $m'^2 = (a - R)/(a + R)$ qui dans ce cas s'annulent. Le cas problématique $k_\pm = 1$ n'apparaissant que lorsque $\zeta_\pm = 0$, le terme $\zeta_+\mathbf{H}(m, k_+) + \zeta_-\mathbf{H}(m, k_-)$ reste toujours fini. Cela signifie donc que l'intégration de notre fonction GAM sur le rayon a peut être produite numériquement sans grande difficulté dès que l'on connaît $z_\pm(a)$ (la surface du corps étudié). Cependant cette intégration doit être faite avec précaution. En effet, lorsque l'on étudie la fonction $\mathbf{H}(m, k)$ comme une fonction de a , nous remarquons que celle-ci est non-dérivable en $R = a$. Ce saut dans la dérivée provient de la fonction $\mathbf{\Pi}(m, k)$ et peut être déterminé. Quand $a \rightarrow R$ (c'est à dire $m \rightarrow 1$) et pour $\zeta \neq 0$, nous avons (Durand, 1953) :

$$m'^2\mathbf{\Pi}(m, k) \underset{m \rightarrow 1}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{m'}{k'}. \quad (4.28)$$

Or comme

$$\partial_a m' = \pm \frac{2R}{(a + R)^2}, \quad (4.29)$$

où le signe + correspond à $a > R$, la discontinuité dans la dérivée de $\mathbf{\Pi}(k, m)$ provoque une discontinuité dans la dérivée de $\mathbf{H}(m, k)$. Ce saut se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow 1} \partial_a m'^2 \mathbf{\Pi}(m, k) &= \partial_a \lim_{m \rightarrow 1} m'^2 \mathbf{\Pi}(m, k), \\
&= \partial_a \frac{\pi}{2} \frac{m'}{k'}, \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{k'} \partial_a m' - \frac{\pi}{2} \frac{m'}{k'^2} \partial_a \frac{1}{k'}, \\
&= \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{k'} \frac{2R}{(a+R)^2}, \\
&= \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{k'} \frac{1}{2R}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Comme

$$\frac{\zeta}{2\sqrt{aR}} = \pm \frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{mk}, \tag{4.31}$$

le signe + étant pour le cas $\zeta > 0$, nous avons donc $\lim_{m \rightarrow 1} \zeta = \pm 2R \frac{k'}{k}$, ce qui nous donne pour la valeur du saut pour $\zeta > 0$ le résultat suivant :

$$\lim_{m \rightarrow 1} \zeta k \partial_a m'^2 \mathbf{\Pi}(m, k) = \pm \frac{\pi}{2}. \tag{4.32}$$

Le noyau de Green contenant la différence $\zeta_+ \mathbf{\Pi}(m, k_+) - \zeta_- \mathbf{\Pi}(m, k_-)$, la discontinuité est en fait de 2π au total, sauf pour un point qui se situe sur la surface où dans ce cas-là la discontinuité est seulement de π . Tout ceci est toujours vrai sauf pour le cas $\zeta = 0$ où la discontinuité disparaît, car nous avons :

$$m' \mathbf{\Pi}(m, m) \rightarrow \mathbf{E}(m), \tag{4.33}$$

qui est parfaitement continue. En résumé, selon les coordonnées (R, Z) du point de champ, la discontinuité prend trois valeurs :

- 0, à l'extérieur du domaine,
- π , sur la surface $(\partial\Omega)$,
- 2π , à l'intérieur du domaine (Ω) .

Ajoutons que cette fonction peut se réécrire en fonction de la variable :

$$x = \frac{k}{m} = \frac{a+R}{\sqrt{(a+R)^2 + \zeta^2}} \in [0, 1], \tag{4.34}$$

qui n'est autre que le module k normalisé a sa valeur maximale. Nous avons en effet :

$$\mathbf{H}(m, mx) = mx [\mathbf{K}(mx) - m'^2 \mathbf{\Pi}(m^2, mx)], \tag{4.35}$$

$$\frac{\mathbf{H}(m, mx)}{\mathbf{H}(m, 0)} = \frac{2}{\pi} x' \frac{\mathbf{K}(mx) - m'^2 \mathbf{\Pi}(m^2, mx)}{1 - m'}, \tag{4.36}$$

où

$$\mathbf{H}(m, 0) = \frac{\pi}{2} (1 - m'), \tag{4.37}$$

et $x' = \sqrt{1 - x^2}$. Cette fonction est tracée sur la figure 4.3.

Nous pouvons conclure de cette analyse que l'équation 4.21 satisfait deux propriétés importantes qui rend notre nouvelle formulation de la GAM plus performante :

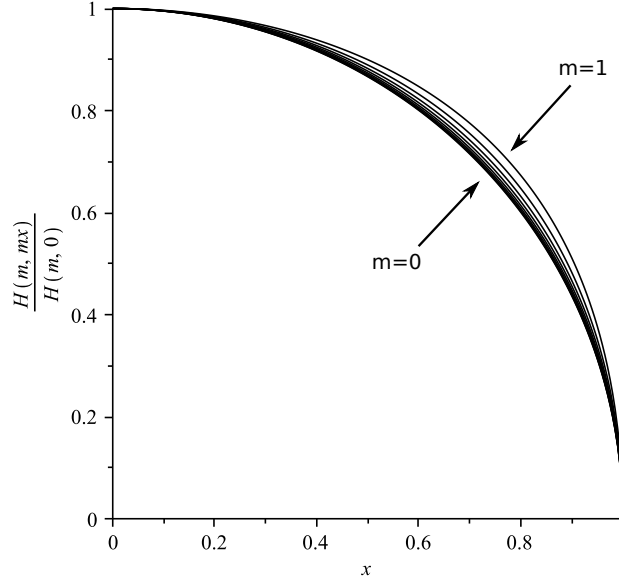


FIGURE 4.3 – La fonction $\zeta \mathbf{H}(m^2, mx)$ normalisée par sa valeur en $x = 0$ en fonction de x pour différentes valeurs de $m \in [0, 1]$.

ou encore

- le noyau ne contient aucune singularité. Il est donc plus aisé de calculer numériquement le potentiel gravitationnel ;
- cette expression conserve les propriétés Newtoniennes du potentiel et des forces associées puisqu'il s'agit d'une conversion exacte du noyau de Green.

5 Expression et comportement à longue distance du potentiel gravitationnel de systèmes axi-symétriques

Une fois que la fonction GAM est connue, en combinant celle-ci avec l'équation 4.2, nous pouvons construire une expression générale pour le **potentiel de systèmes axi-symétriques verticalement homogènes** :

$$\psi(R, Z) = -G \int_a \Sigma(a) \frac{1}{h} \sqrt{\frac{a}{R}} da \int_{z_-}^{z_+} k \mathbf{E}(k) dz + G \int_a \Sigma(a) \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{1}{h} [\zeta_+ \mathbf{H}(m, k_+) - \zeta_- \mathbf{H}(m, k_-)] da, \quad (4.38)$$

avec k défini par l'équation 3.10 (cf chapitre précédent), k_{\pm} par l'équation 4.24 et $\mathbf{H}(m, k)$ par l'équation 4.22. Le potentiel gravitationnel d'un objet axi-symétrique verticalement homogène s'exprime donc à l'aide d'une intégrale de surface sur $(\Omega; \text{premier terme})$ et d'une intégrale sur le contour $(\partial\Omega; \text{deuxième terme})$, et toutes deux à intégrande totalement régulière. L'expression 4.38 a aussi l'avantage d'être **exacte** et **valide** pour tout point (R, Z) de l'espace, pour tout profil radial de densité $\Sigma(a)$ et surface $h(a)$ et d'être **Newtonien**. Nous pouvons vérifier ce dernier point analytiquement en étudiant le comportement à longue distance. En effet loin du système, nous nous attendons à ce que le

potentiel du disque tende vers le potentiel généré par un objet ponctuel, c'est à dire :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\psi = -GM, \quad (4.39)$$

où $r = \sqrt{R^2 + Z^2}$ est le rayon sphérique, et

$$M = 2\pi \int_a a \Sigma(a) da \quad (4.40)$$

est la masse totale. A grande distance du système étudié, nous avons

$$k \sim \frac{2\sqrt{aR}}{r} \rightarrow 0. \quad (4.41)$$

Nous pouvons facilement en déduire le comportement des intégrales elliptiques. En particulier, nous avons, en allant jusqu'au deuxième ordre, d'après Gradshteyn and Ryzhik (1965)

$$\begin{cases} \mathbf{K}(k) \sim \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right), \\ \mathbf{E}(k) \sim \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4}\right), \\ \mathbf{\Pi}(m, k) \sim \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{k^2}{2}\right)\right]. \end{cases} \quad (4.42)$$

Nous obtenons donc, au premier ordre, pour le premier terme de gauche de l'équation 4.38

$$\begin{aligned} -G \int \frac{\Sigma(a)}{h(a)} da \sqrt{\frac{a}{R}} \int k \mathbf{E}(k) d\zeta &\sim -\pi G \int \frac{\Sigma(a)}{h(a)} \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{2\sqrt{aR}}{r} \frac{\pi}{2} da \int d\zeta, \\ &\sim -2\pi G \int \Sigma(a) a da, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\sim -\frac{GM}{r}, \quad (4.44)$$

qui est le résultat attendu. Il ne nous reste donc à vérifier que la contribution résultant du deuxième terme de l'équation 4.38, c'est à dire celui provenant de la fonction $\mathbf{H}(m, k)$, est plus petit que le terme que nous venons de calculer. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \zeta_{\pm} \mathbf{H}(m, k_{\pm}) &= \zeta_{\pm} k_{\pm} [\mathbf{K}(k_{\pm}) - m'^2 \mathbf{\Pi}(m^2, k_{\pm})], \\ &\sim \zeta_{\pm} k_{\pm} \left\{ \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right) - (1 - m^2) \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{k^2}{2}\right)\right] \right\}, \\ &\sim \zeta_{\pm} k_{\pm} \frac{\pi}{4} (1 + m^2) \left(m^2 + \frac{k_{\pm}^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Puisque k_{\pm}^2 et m^2 sont du même ordre, la fonction $\zeta_{\pm} \mathbf{H}(m, k_{\pm})$ se comporte comme k_{\pm}^3 . Elle est donc bien plus petite que le premier terme. Le comportement à grande distance est donc correct.

| Section | a_{in} | a_{out} | Rayon moyen | h_{max} |
|-----------------------------------|----------|-----------|-------------|-----------|
| carrée | 0.5 | 1 | 0.25 | 0.25 |
| circulaire | 0.5 | 1 | 0.25 | 0.25 |
| ellipsoïdale (mince) | 0.3 | 1.3 | 0.5 | 0.1 |
| ellipsoïdale (relativement épais) | 0.3 | 1.3 | 0.5 | 0.25 |
| sphère | 0 | 1 | 1 | 1 |

TABLE 4.1 – Configurations académiques et modèles de disques.

II Tests numériques

Dans cette partie, nous étudions numériquement le comportement de la fonction GAM et de l'expression associée du potentiel dans des configurations académiques telles que des tores de section carrée ou circulaire et dans des configurations plus réalistes comme un disque évasé par exemple. Nous nous limiterons à des cas où la masse volumique est homogène, bien que l'expression permette d'inclure des gradients radiaux. Ces configurations sont définies par le tableau 4.1 ; en particulier a_{in} et a_{out} sont respectivement les coordonnées radiales du bord interne et externe du système (voir figure 4.1). Ici, le rayon moyen est la distance entre le centre du système et son bord interne/externe et h_{max} désigne la demi-épaisseur maximale.

1 Étude de la fonction GAM

La fonction GAM \mathcal{G} dépendant aussi de (R, Z) , nous avons sélectionné trois points où la calculer :

- un point A à l'intérieur du système,
- un point B à l'extérieur du domaine,
- un point C "relativement loin" du système.

Rappelons que l'intégration de la GAM sur le volume matériel donne le potentiel.

1-1 Tests sur 3 configurations-type

Considérons pour commencer le cas d'un tore homogène de section carrée défini sur la figure 4.4 et dont les caractéristiques sont données dans le tableau 4.1.

La fonction GAM de ce système est représentée sur la figure 4.7 aux trois points A, B et C (mêmes coordonnées que pour le tore de section carrée). Ici, nous choisissons $A(3/4, 0)$, $B(1, 1)$ et $C(10, 10)$. Le résultat est donné à la figure 4.5. Nous effectuons un test similaire mais cette fois-ci, nous considérons un tore de section circulaire (voir schéma sur la figure 4.6 et les caractéristiques dans le tableau 4.1). Enfin, nous traçons la GAM pour un disque de rapport d'aspect $h \sim 0.1R$, défini par la figure 4.8 et le tableau 4.1. La fonction GAM de ce dernier système est représentée sur la figure 4.9. Que nous disent ces trois figures ? Comme attendu, nous remarquons que \mathcal{G} est piquée en $a = R$ lorsque nous sommes à l'intérieur de l'objet et décroît près des bords. Nous voyons également un saut dans la dérivée qui s'explique par la présence de la fonction $\mathbf{H}(m, k)$, comme expliqué dans la section I-4. Lorsque nous déplaçons notre point de champ vers les bords de l'objet, le maximum se déplace également avec. A l'extérieur du système la fonction GAM a une

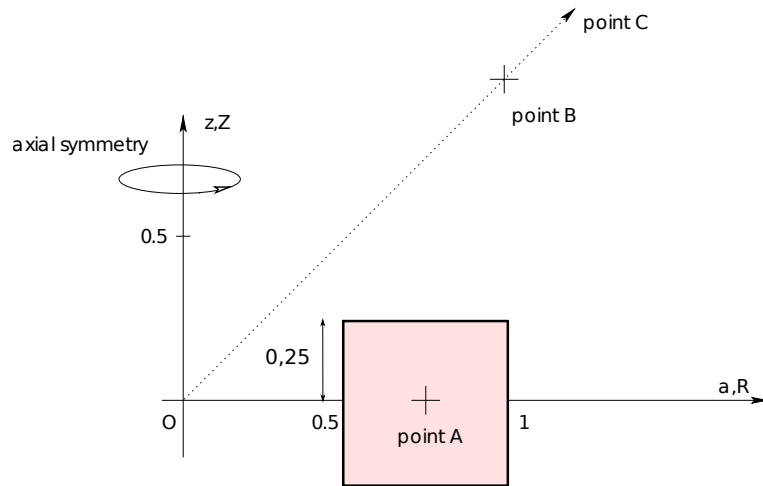


FIGURE 4.4 – Configuration d'un tore de section carrée (cf 4.1).

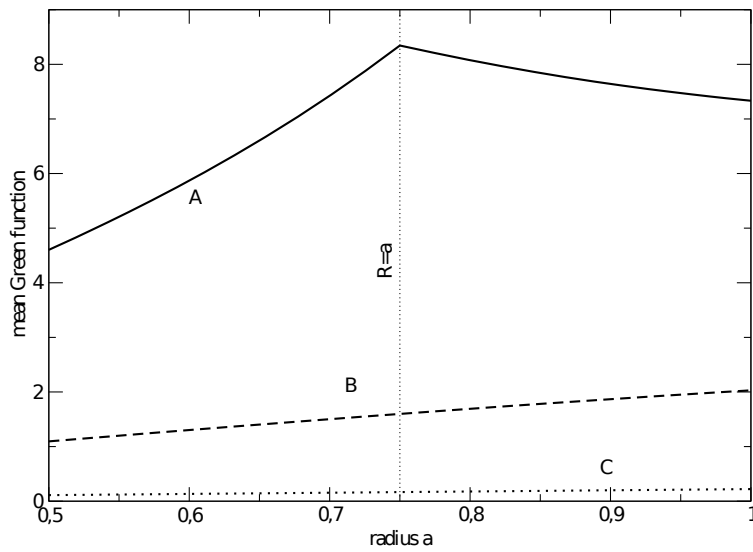


FIGURE 4.5 – Variation de la fonction GAM en fonction du rayon a (équation 4.23) pour le tore de section carrée défini par la figure 4.4 et le tableau 4.1.

amplitude qui diminue avec l'éloignement à la distribution de matière. Ce résultat est logique car plus nous sommes loin du système, moins l'effet du potentiel généré par ce dernier est important. Lorsque l'on se déplace à l'extérieur du système, la GAM reste piquée au-dessus et en-dessous de la distribution, pic qui disparaît lorsque l'on se trouve à droite ou à gauche du système.

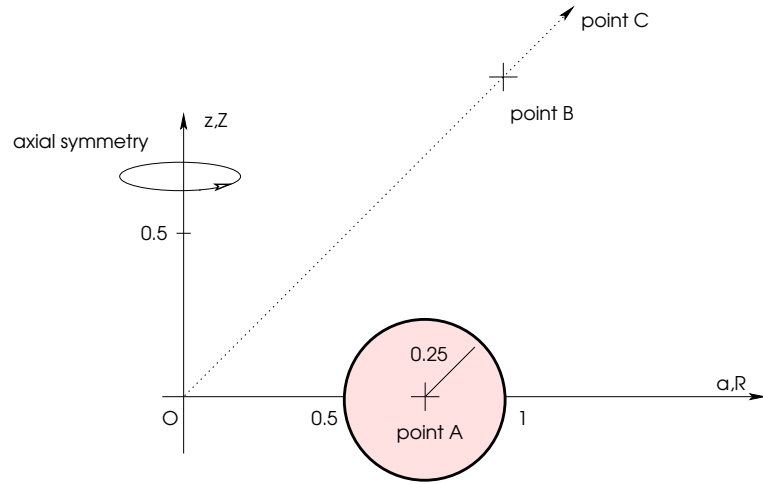


FIGURE 4.6 – Configuration d'un tore de section circulaire représenté sur la figure 4.6 et défini par le tableau 4.1).

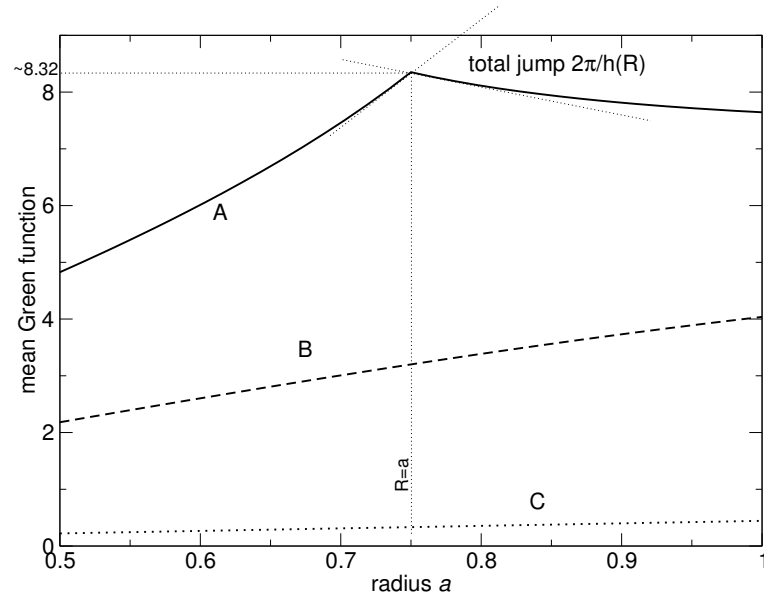


FIGURE 4.7 – Variation de la fonction GAM en fonction du rayon a (équation 4.23) pour le tore de section circulaire représenté à la figure 4.6 et défini par le tableau 4.1.

2 Analyse du potentiel gravitationnel exprimé via la fonction GAM

Après avoir vu le comportement de la fonction GAM, nous allons maintenant analyser celui du potentiel gravitationnel (cf formule 4.38). Dans un premier temps, nous testons l'expression 4.23 dans le cas de la sphère homogène et de l'ellipsoïde dont le potentiel est connu, puis pour le tore grâce à une solution de référence (méthode de "double splitting" décrite dans le chapitre 3, section III). Les différences sont mesurées via le paramètre ϵ (voir 3.37).

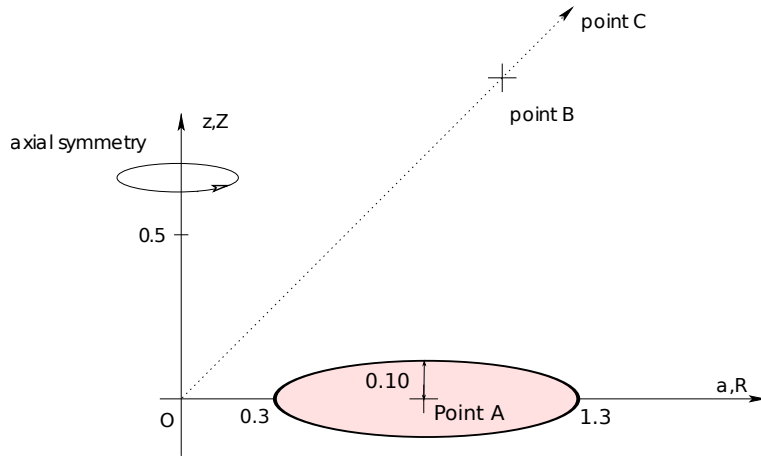


FIGURE 4.8 – Configuration d'un disque de rapport d'aspect $h \sim 0.1R$. Ces caractéristiques sont définies sur la figure 4.8 et le tableau 4.1.

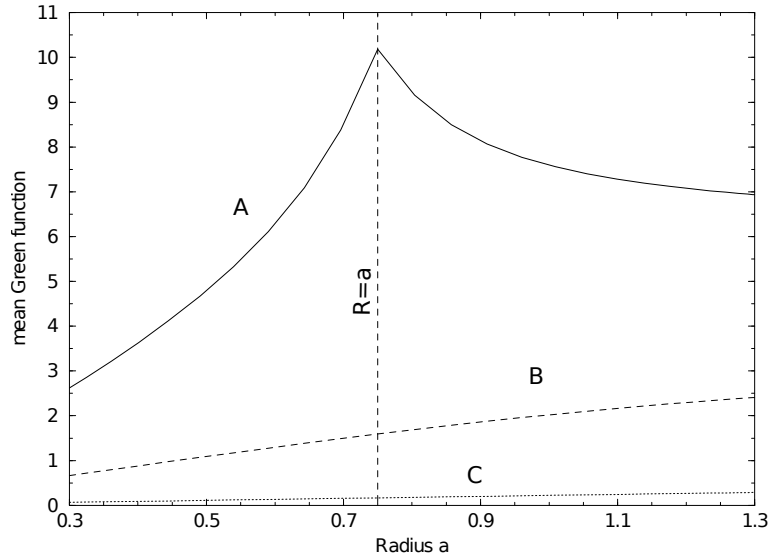


FIGURE 4.9 – Variation de la fonction GAM en fonction du rayon a (équation 4.23) pour un disque dont les caractéristiques sont données par la figure 4.8 et le tableau 4.1.

2-1 Retrouve-t-on le potentiel de la sphère ?

Pour une sphère homogène de rayon R_0 et de masse M le potentiel est représentée sur la figure 4.10 et il vaut (théorème de Gauss) :

$$\begin{cases} \frac{GM}{2R_0^3}r^2 - \frac{3}{2}\frac{GM}{R_0}, & r < R_0 \\ -\frac{GM}{r} & r > R_0, \end{cases} \quad (4.46)$$

où $r = \sqrt{R^2 + Z^2}$ est le rayon sphérique. Les écarts sont tracés à la figure 4.11 et sont de l'ordre de $10^{-3.5} - 10^{-4}$. Inévitablement les erreurs sont bien plus faibles à l'extérieur.

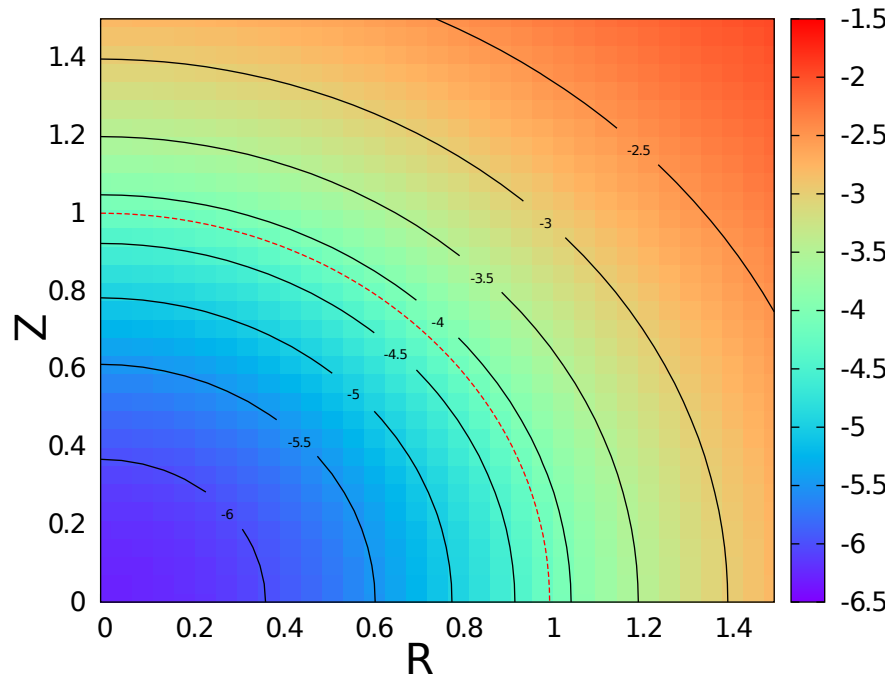


FIGURE 4.10 – Carte du potentiel normalisé d’une sphère homogène calculé avec l’équation 4.38 aux nœuds d’une grille (R, Z) régulière (33×33 nœuds, R et $Z \in [0; 1.5]$). La sphère a un rayon $R_0 = 1$. La courbe rouge en tiret représente la surface de la sphère. Les lignes représentent les iso-potentiels.

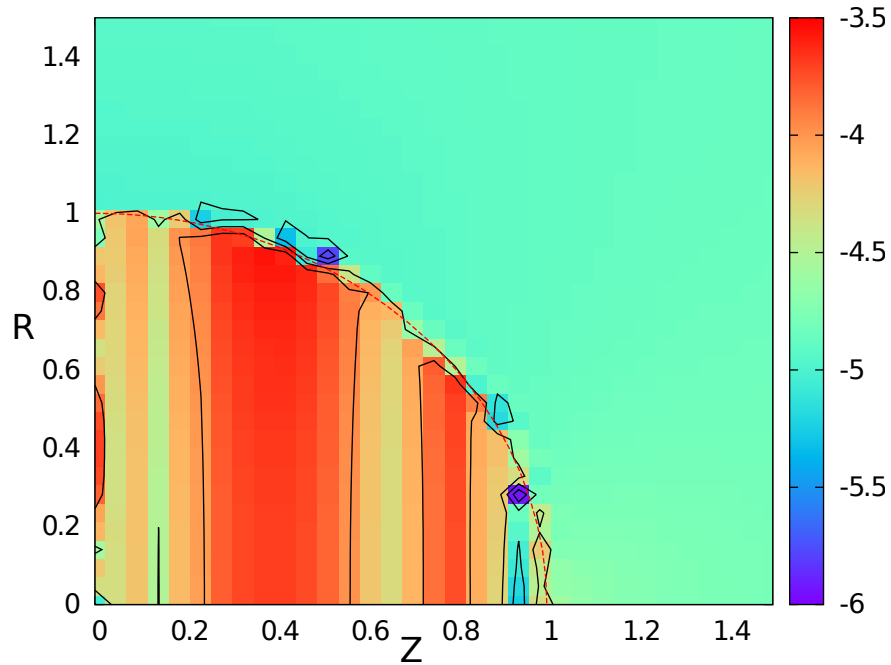


FIGURE 4.11 – Erreur relative (en échelle logarithmique) entre le potentiel calculé avec 4.38 et avec 4.46. Les conditions sont les mêmes que celles de la figure 4.10.

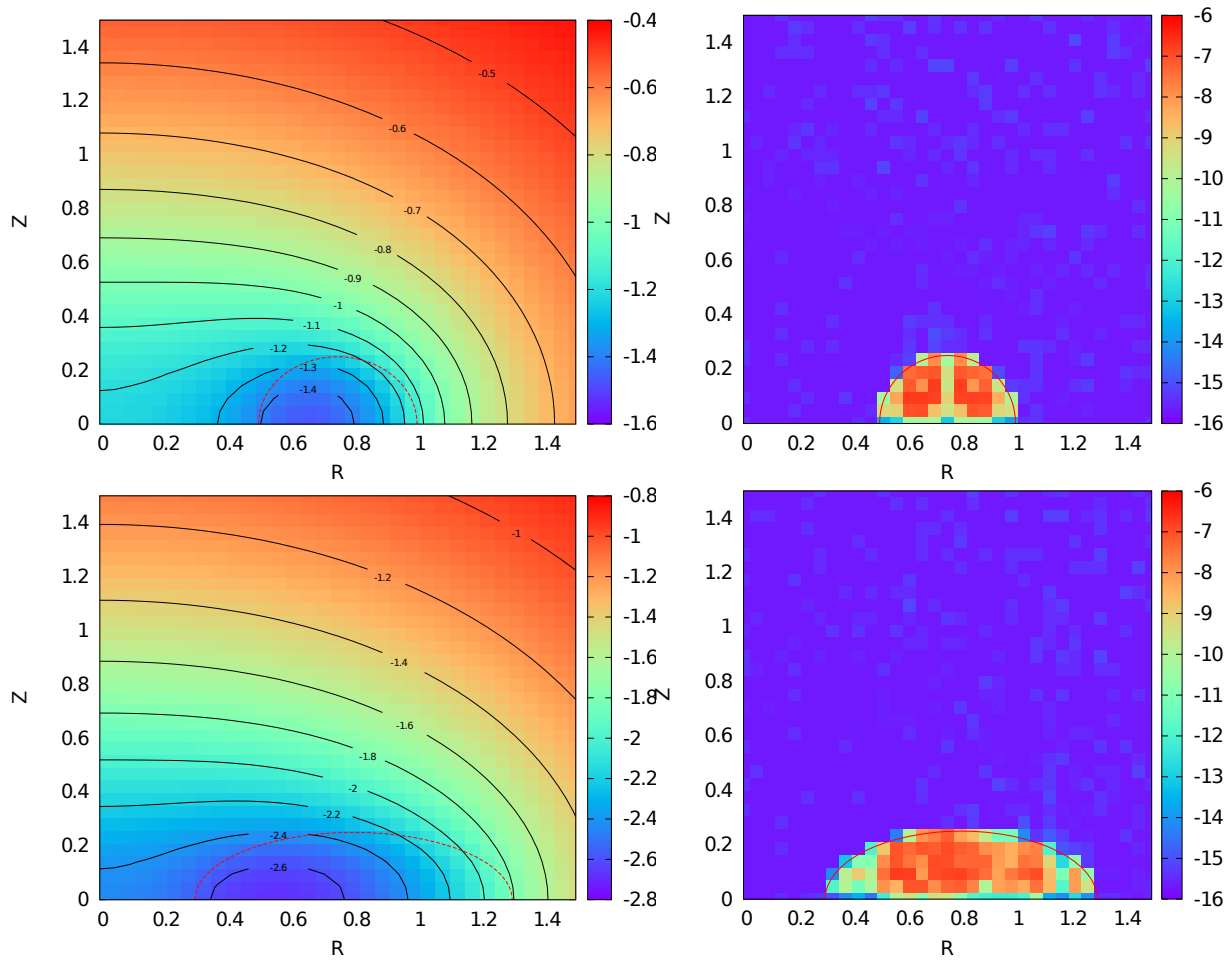


FIGURE 4.12 – A gauche : Cartes du potentiel gravitationnel de différentes configurations. A droite : Carte de l'erreur (échelle logarithmique) entre notre expression du potentiel et la référence (le splitting). Les systèmes étudiés sont le tore circulaire et l'ellipsoïde (tous totalement homogènes) dont les caractéristiques sont définies dans le tableau 4.1. Les valeurs sont calculées aux nœuds d'une grille (R, Z) régulière (33×33) nœuds). La surface de chaque système est représentée en trait plein rouge.

2-2 Cas du tore et de l'ellipsoïde

Sur la figure 4.12, à gauche, nous avons représenté une carte du potentiel générée par les deux configurations homogènes suivantes :

- le tore de section circulaire,
- l'ellipsoïde (relativement épais)

dont les caractéristiques sont données dans le tableau 4.1. Sur la figure 4.12, à droite, nous traçons l'erreur ϵ , où la référence pour les deux est calculée avec la méthode de "splitting". La formule servant à établir la référence étant strictement équivalente à l'équation 4.38, nous nous attendons à ce que les erreurs entre les deux calculs soient très faibles. En effet c'est ce qu'illustre la figure 4.12 où l'on voit qu'à l'extérieur nous atteignons même la précision de la machine alors qu'à l'intérieur on atteint en moyenne $10^{-7} \sim 10^{-8}$. Ces erreurs correspondent en fait au traitement numérique. Il faut savoir que l'équation de la surface du tore et de l'ellipsoïde contient une fonction racine carrée qu'il n'est pas

facile de traiter numériquement (la dérivée de la surface est discontinue sur les bords du système). Par ailleurs, la fonction \mathbf{H} a une dérivée discontinue. Cette approche a l'avantage d'être numériquement moins lourde que la méthode de "splitting". Elle permet également d'ajouter une densité surfacique variable avec le rayon. Cependant, contrairement à la méthode de "splitting", la fonction GAM n'est valable que dans le cas d'objets qui ont une distribution de matière verticalement homogène. Une question, qu'il est légitime de se poser est : que peut-il se passer si le système est stratifié verticalement, c'est-à-dire si la masse volumique dépend de l'altitude ? C'est ce que nous étudions maintenant.

III Influence d'une stratification verticale

Les systèmes réalistes possèdent non seulement des gradients de densité dans la direction radiale mais aussi dans la direction verticale. Il est donc intéressant de tester la sensibilité de notre résultat à un profil de densité $\rho(z) \neq cste$, ce qui permettrait d'étendre la validité à des cas plus proches de la réalité. Quels profils choisir ? Dans les modèles de disques géométriquement minces (Shakura and Sunyaev, 1973) la masse volumique est souvent une combinaison d'une loi de puissance en rayon et d'un profil Gaussien dans la direction perpendiculaire au plan équatorial, soit

$$\rho(z) = 2\rho_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\left(\frac{2z^2}{h^2}\right)}, \quad (4.47)$$

où $z \in [-\infty, \infty]$ et où ρ_0 est une constante ou bien une fonction du rayon. Ce profil de densité est une conséquence directe d'un gaz localement isotherme et à l'équilibre hydrostatique (Pringle, 1981; Müller *et al.*, 2012; Hughes *et al.*, 2008). Dans ce contexte, il est instructif de considérer également le profil parabolique, proche d'un profil gaussien, mais où la matière est confinée dans un domaine fini :

$$\rho(z) = \frac{3}{2}\rho_0 \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right], \quad (4.48)$$

où $z \in [-h, h]$. Afin de comparer correctement nos 3 profils de densités, il nous faut la même densité de surface pour ces 3 distributions, c'est-à-dire ici $\Sigma_{tot} = 2\rho_0 h$ (d'où les préfacteurs).

1 Effet sur la fonction GAM

Regardons pour commencer l'influence de cette densité verticale sur la fonction GAM en introduisant une expression analogue à l'équation 4.4, pour un profil vertical inhomogène, définie par :

$$\mathcal{G}^{in} = \int_z 2\sqrt{\frac{a}{R}} \rho(z) k \mathbf{K}(k) dz / \int_z \rho(z) dz. \quad (4.49)$$

La figure 4.13 représente la fonction de Green moyenne au point A via l'équation 4.4 et via l'équation 4.49 pour les deux profils de densité inhomogènes définis précédemment. Le système étudié, ici, est le tore de section circulaire représenté sur la figure 4.6 et dans le tableau 4.1. Nous remarquons que la forme des trois fonctions GAM est assez similaire et reste piquée en $a = R$. Le maximum de la fonction est plus élevé pour le

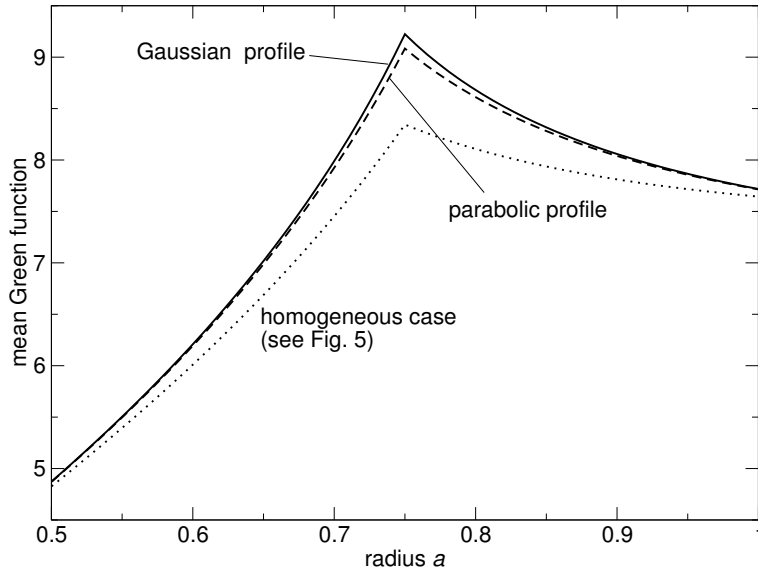


FIGURE 4.13 – Variation de la fonction GAM en fonction du rayon a au point A pour le tore de section circulaire (cf tableau 4.1) défini par la figure 4.6 pour trois différents profils $\rho(z)$: le cas homogène (voir Fig.4.7), le profil parabolique et le profil Gaussien.

profil parabolique et plus encore dans le cas Gaussien (respectivement, 10% et 11% par rapport au cas homogène). Ceci est dû à la différence de valeur centrale, qui varie selon le profil (1.5 profil parabolique, ~ 1.59 profil Gaussien et 1 cas homogène). Nous pouvons remarquer à l'aide de la figure 4.14, que l'écart relatif entre le profil homogène et les deux profils inhomogènes reste assez faible, entre 1% et 10%. La différence sur la valeur du potentiel, qui est représentée ici par l'aire sous la courbe, n'est pas très différente sur les trois profils. Nous avons pour le profil parabolique $\Psi_A \approx -1.504$, pour le profil Gaussien $\Psi_A \approx -1.513$ et $\Psi_A \approx -1.436$ dans le cas homogène. Cet excès minime, d'environ 5%, est prévisible. En effet, en général, plus la distribution de masse est concentrée, plus le puits de potentiel est profond.

Nous avons effectué les mêmes comparaisons au point B , à l'extérieur de la distribution mais toutefois assez proche, et au point C , assez éloigné de la distribution (voir Fig.4.6). Afin de comparer les 3 profils en ces deux points, nous avons également tracé l'écart relatif (en échelle logarithmique) entre le profil homogène et le profil parabolique et entre le profil homogène et le profil gaussien. C'est ce qui apparaît sur les figures 4.15 et 4.16. Nous pouvons noter que plus nous nous éloignons de la distribution, plus la différence relative entre le profil homogène et les deux autres profils de densité inhomogènes diminue. Au point B , l'écart est d'environ 10^{-3} et au point C d'environ 10^{-5} . De nouveau, cet effet n'est pas surprenant : à grande distance le potentiel de la distribution tend au potentiel d'une masse ponctuelle, le profil de la distribution n'étant plus perceptible.

2 Effet sur le potentiel gravitationnel

Afin d'avoir une vue plus globale, nous pouvons faire la même étude sur le potentiel gravitationnel en calculant l'écart entre le potentiel gravitationnel d'un système inhomogène

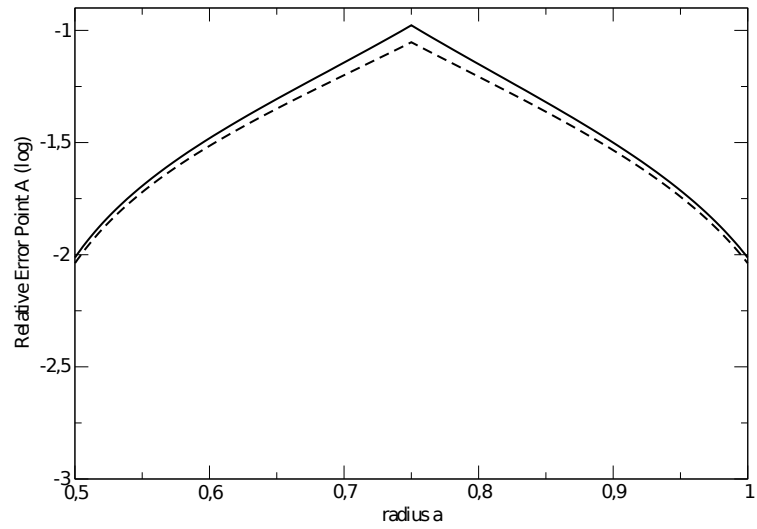


FIGURE 4.14 – Variation de l'erreur relative en échelle logarithmique au point A (à l'intérieur du tore) en fonction du rayon a entre le profil homogène et le profil parabolique (tiret) et entre le profil homogène et le profil Gaussien (ligne) pour le tore de section circulaire défini par la figure 4.6 et dans le tableau 4.1.

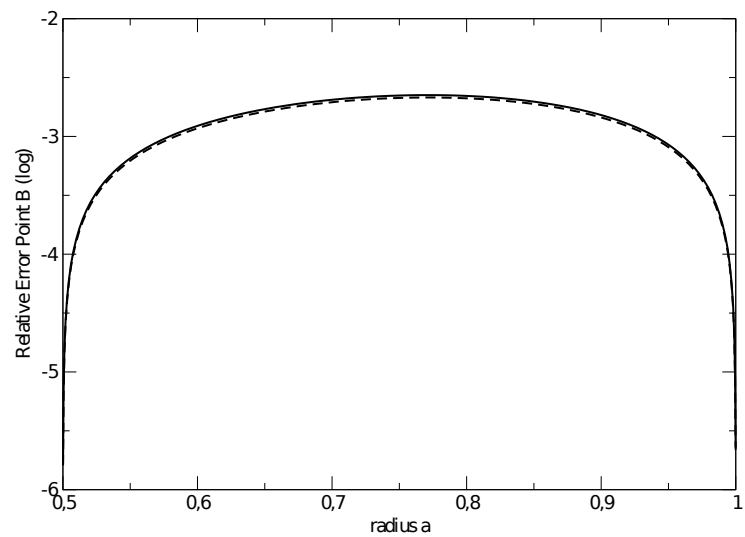


FIGURE 4.15 – même légende que 4.14 mais au point B .

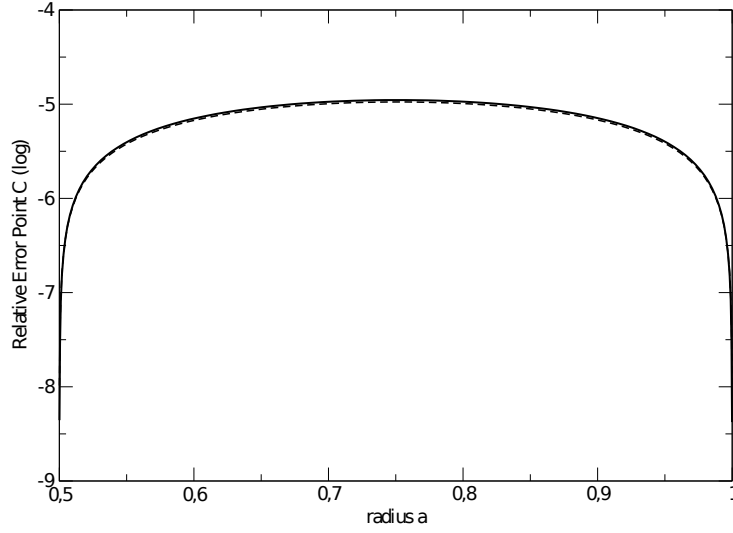


FIGURE 4.16 – même légende que 4.14 mais au point C.

gène verticalement donné par l'expression suivante :

$$\Psi^{inh} = \int_a \Sigma(a) \mathcal{G}^{in}(R, Z; a, z_{\pm}) da, \quad (4.50)$$

où \mathcal{G}^{in} est définie par l'équation 4.49 et le potentiel verticalement homogène donné par l'équation 4.38 pour le même système. Cette étude est réalisée pour quatre configurations :

- un tore de section circulaire,
- un tore de section carrée,
- une ellipsoïde,
- un disque évasé,

et dans le plan (R, Z) . Toutes les caractéristiques de ces systèmes sont regroupées dans le tableau 4.1. Les cartes d'erreur sont représentées sur la figure 4.17. Nous remarquons qu'à l'extérieur, l'écart est très faible (bien inférieur à 1% et pour l'intérieur il est au maximum de 10%). Ce que nous avons obtenu pour la fonction GAM, se prolonge pour le potentiel. L'hypothèse d'une homogénéité verticale ne conduit pas à des différences importantes si on a à faire à un système verticalement inhomogène, pour les deux profils testés au moins.

IV Comparaison avec Bannikova *et al.* (2011)

Nous pouvons comparer notre approche avec celle de Bannikova *et al.* (2011) que nous avons décrite dans le chapitre 3, section III.

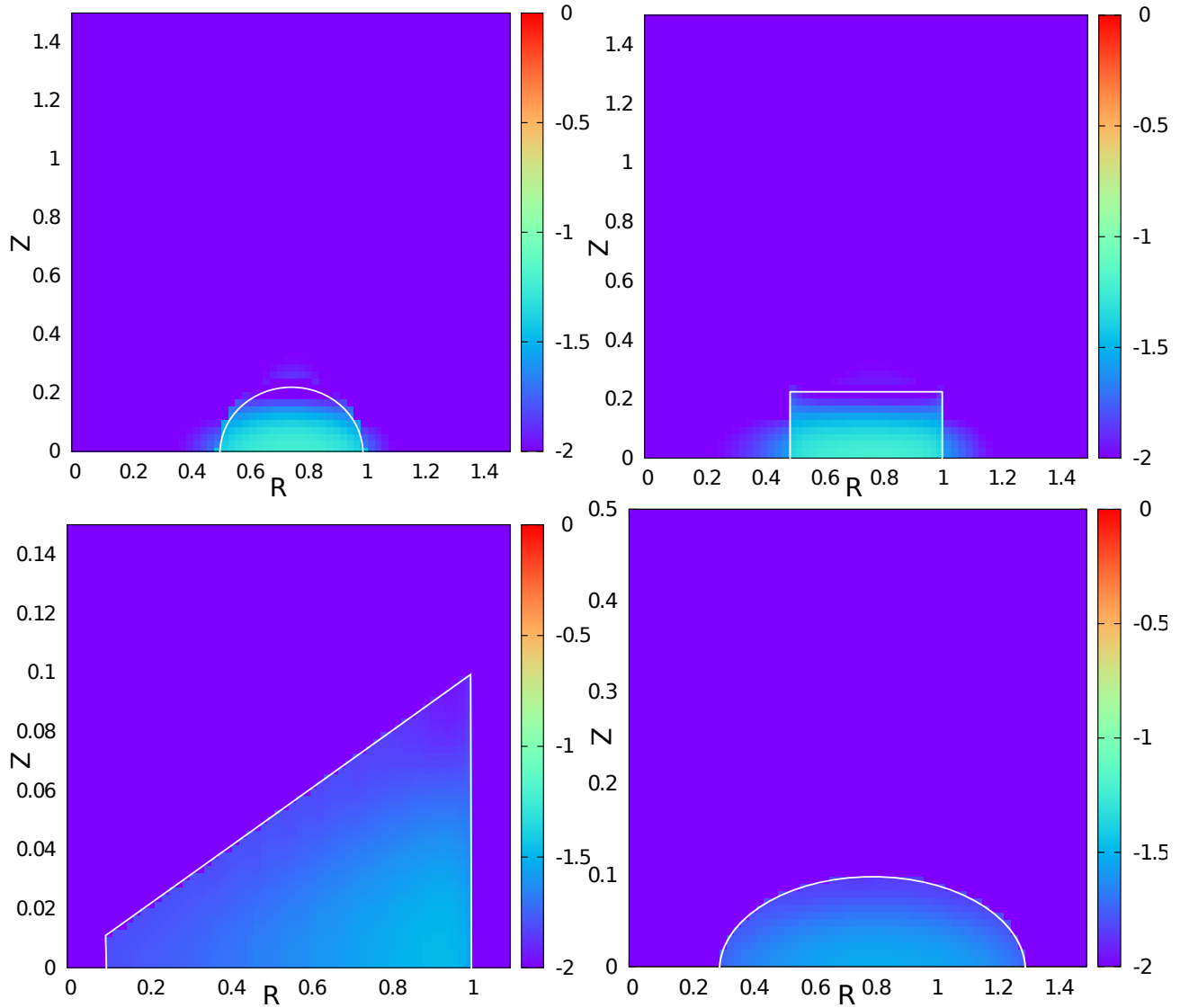


FIGURE 4.17 – Écart relatif (échelle logarithmique) entre les valeurs du potentiel pour un profil de densité vertical Gaussien et un profil de densité vertical homogène pour quatre systèmes différents aux nœuds d'une grille (R, Z) régulière $(64 \times 64$ nœuds). En haut à gauche pour un tore de section circulaire, en haut à droite un tore de section carrée, en bas à gauche une ellipsoïde et en bas à droite un disque évasé. Toutes les caractéristiques de ces disques sont dans le tableau 4.1.

1 Potentiel gravitationnel externe

Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que dans l'article de Bannikova *et al.* (2011). L'objet étudié est à nouveau un tore de section circulaire de paramètres $r_0 = 0.5$ ($G = 1, M = 1$ et $R_t = 1$ pour toutes les applications numériques) défini sur la figure 3.4 du chapitre 3, section II. Le potentiel externe du tore en fonction du rayon ρ est représenté sur la figure 4.18. Nous remarquons une différence faible entre les deux courbes.

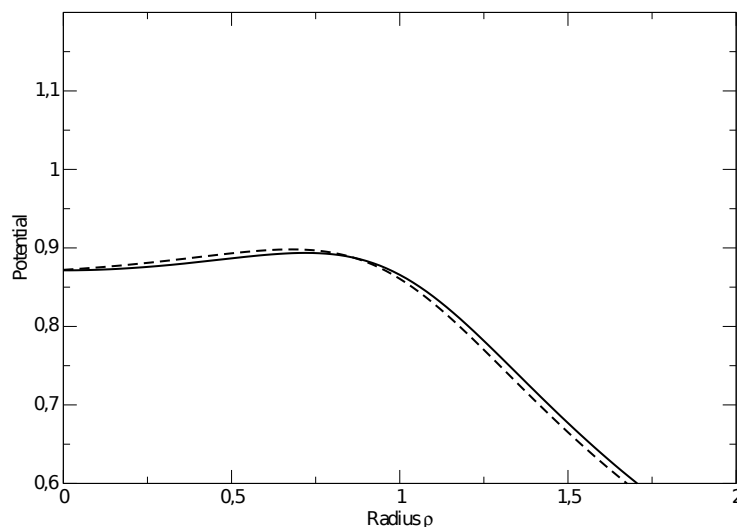


FIGURE 4.18 – Représentation du potentiel externe en $\zeta = 0.5$, avec $r_0 = 0.5$, dû au tore homogène en fonction du rayon ρ . En trait plein, est représenté le potentiel gravitationnel via notre formule 4.38 et en pointillé celui calculé via la formule 3.25 (chapitre 3, section I-II).

Cette différence est tracée sur la figure 4.19 en échelle logarithmique, via l'indice d'erreur suivant :

$$\epsilon = \log \frac{|\Psi - \phi_{torus}^{ext}|}{\Psi} \quad (4.51)$$

où ϕ_{torus}^{ext} est donné par l'équation 3.25. L'erreur relative moyenne entre nos deux formules est d'environ 10^{-2} .

2 Potentiel gravitationnel interne

Nous pouvons, comme précédemment, comparer notre potentiel gravitationnel, équation 4.38, au potentiel calculé avec l'équation 3.28 (chapitre 3, section II), à l'intérieur du tore. C'est ce que représente la figure 4.20. Ce qui est intéressant de comparer ici, ce sont les parties de la courbe qui se situent entre les deux traits verticaux, la formule 3.28 n'étant valable que dans cette zone qui représente l'intérieur du tore. La différence entre les deux courbes est de nouveau très faible. La différence relative en échelle logarithmique

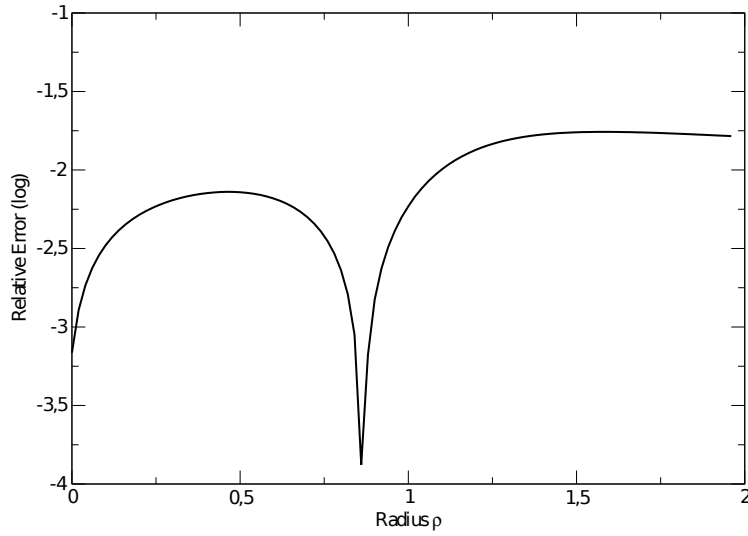


FIGURE 4.19 – Représentation de l’erreur relative en échelle logarithmique calculée avec l’équation 4.51 entre les deux potentiels (même configuration que pour la figure 4.18).

entre ces deux potentiels est tracée sur la figure 4.21 avec l’équation suivante :

$$\epsilon = \log \frac{|\Psi - \phi_{torus}^{int}|}{\Psi} \quad (4.52)$$

Comme pour la figure précédente, ce qui est intéressant d’analyser est l’erreur relative entre les deux traits verticaux (entre a_{in} et a_{out}). Elle est plus faible qu’à l’extérieur et est environ égale à $10^{-3.5}$ dans le domaine $\rho \in [0.5, 1.5]$. Alors que l’expression de ϕ_{torus}^{int} est donnée dans le cas de tores de petites ($r_0 \ll 1$), nous pouvons remarquer qu’elle reste valable pour un tore où $r_0 = 0.5$. Le calcul de Bannikova *et al.* (2011) a l’avantage de donner une bonne approximation du potentiel gravitationnel, en ne poussant le développement qu’à l’ordre 2 ; celui-ci a aussi le principal avantage d’en donner une expression algébrique sans intégrale. Mais elle a l’inconvénient de ne pas être exacte et de n’être valable que pour des tores homogènes.

V Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que la fonction GAM peut, pour les systèmes verticalement homogènes, se réécrire sous une forme intégrale équivalente impliquant deux noyaux réguliers, quelque soit le point de l’espace, que l’on soit à l’extérieur ou à l’intérieur du tore. Elle a l’avantage d’être valable pour n’importe quelle densité surfacique radiale et n’importe quelle forme de l’objet. Elle respecte également les propriétés d’un potentiel Newtonien en ayant le comportement attendu à longue distance. Le seul désavantage est que la masse volumique de l’objet doit être invariante selon l’altitude. Cependant nous avons vu que notre formule n’était pas très sensible à la stratification verticale.

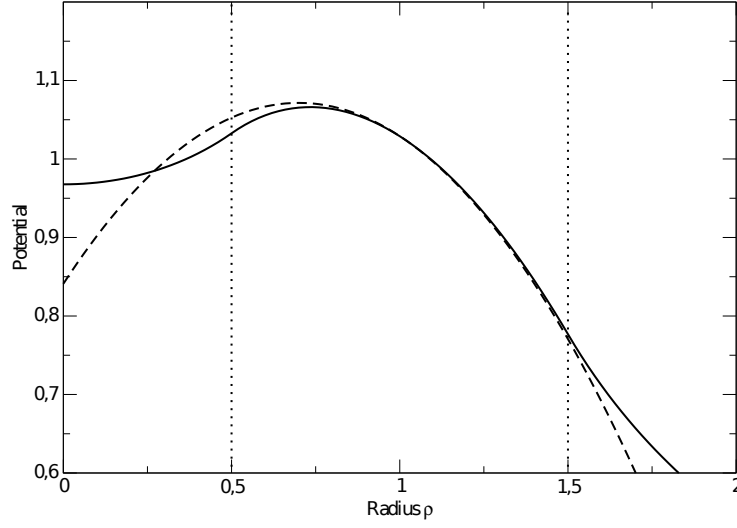


FIGURE 4.20 – Représentation du potentiel interne dans le plan médian ($\zeta = 0$), avec $r_0 = 0.5$, dû au tore homogène en fonction du rayon ρ . En trait plein, est représenté le potentiel gravitationnel via notre formule (Eq.4.38) et en pointillé celui calculé via la formule 3.28 (chapitre 3, section I-II). Les frontières du tore sont représentées par les traits verticaux.

Ces résultats ont fait l'objet de notre premier article Trova *et al.* (2012). Cette formule exacte va nous permettre par la suite de construire des approximations, éventuellement sous forme fermée, dans le cas des disques minces et anneaux ou encore dans le cas de systèmes de faible extension radiale. C'est ce que nous allons montrer dans le chapitre suivant.

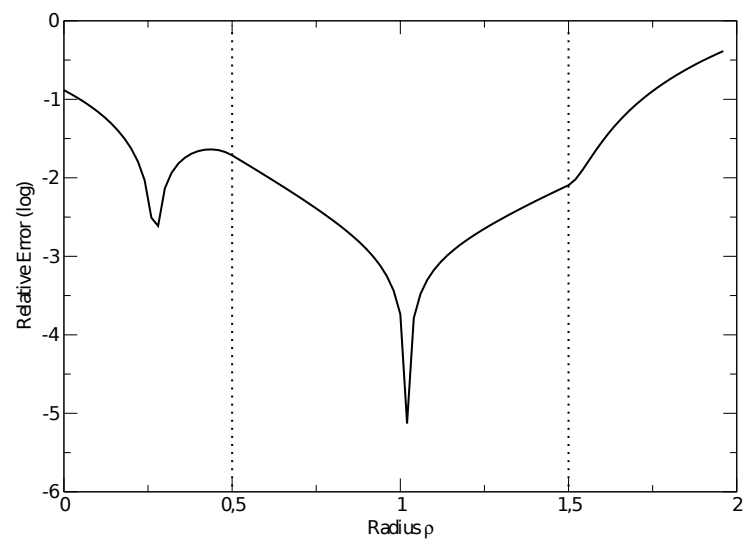


FIGURE 4.21 – Représentation de l'erreur relative en échelle logarithmique entre les deux courbes de la figure 4.20.

Chapitre 5

Applications aux disques minces et aux anneaux

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Approche linéaire. Application aux systèmes de faible extension radiale | 81 |
| 1 | Approximation par morceaux | 82 |
| 2 | Test | 84 |
| 3 | Vers une expression algébrique pour le tore circulaire ? | 84 |
| II | Cas des disques géométriquement minces et anneaux | 86 |
| 1 | Développement de Taylor de la fonction $k\mathbf{E}(k)$ | 86 |
| 2 | Expression approchée de la fonction GAM. Estimation de l'erreur | 88 |
| 3 | Comportement à longue distance | 90 |
| 4 | Application numérique : comportement de \mathcal{G}_{app} vs \mathcal{G} | 91 |
| 5 | Sensibilité de Ψ_{app} à l'épaisseur du disque | 92 |
| III | Conclusion | 94 |

Dans le chapitre précédent, nous avons donné une nouvelle manière d'exprimer le potentiel gravitationnel de disques axi-symétriques verticalement homogènes (notamment via l'équation 4.23, chapitre 4, section I-3). Dans ce chapitre, nous utilisons ce résultat pour produire des expressions approchées dans des configurations spécifiques telles que des disques géométriquement minces et des anneaux. Ces nouvelles approximations vont nous permettre également de baisser le degré des intégrales et de déduire une forme fermée pour des systèmes à faible extension radiale

I Approche linéaire. Application aux systèmes de faible extension radiale

Nous avons remarqué sur les figures 4.5 et 4.7 du chapitre précédent (section II-1), que la fonction GAM, qui présente un pic en $a = R$ quand le point de champ se trouve dans le domaine matériel, est proche d'une fonction linéaire à droite et à gauche. Ceci est d'autant plus vrai que le domaine de variation de a est faible (le cas de tores, des disques épais, et des anneaux). La GAM pourrait donc, a priori, s'approcher par une fonction

linéaire par morceaux lorsque l'on se trouve à l'intérieur du système comme à l'extérieur tant que $\forall Z, a_{in} < R < a_{out}$ et par une fonction linéaire à l'extérieur tant que $a_{in} > R$ ou $a_{out} < R$. Nous constatons que ce n'est en effet pas le cas pour le disque mince très étendu (voir figure 4.9 du chapitre précédent, section II-1) : le pic en $a = R$ est plus important et les ailes sont particulièrement étendues.

1 Approximation par morceaux

Dans le cas où la fonction GAM peut être approchée par une fonction linéaire par morceaux, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{G} = \begin{cases} \alpha_1(a - a_{in}) + \mathcal{G}_{in} & \text{pour } a < R, \\ \alpha_2(a_{out} - a) + \mathcal{G}_{out} & \text{pour } a > R. \end{cases} \quad (5.1)$$

Le potentiel gravitationnel peut donc s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Psi(R, Z) &\sim -G \int_{a_{in}}^R \Sigma(a) [\alpha_1(a - a_{in}) + \mathcal{G}_{in}] da - G \int_R^{a_{out}} \Sigma(a) [\alpha_2(a_{out} - a) + \mathcal{G}_{out}] da, \\ &\sim -G \left\{ \alpha_1 \mathcal{M}_{int} - \alpha_2 \mathcal{M}_{out} + (\mathcal{G}_{in} - \alpha_1 a_{in}) \int_{a_{in}}^R \Sigma(a) da + (\mathcal{G}_{out} + \alpha_2 a_{out}) \int_R^{a_{out}} \Sigma(a) da \right\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\mathcal{G}_{max} - \mathcal{G}_{in}}{R - a_{in}}, & \alpha_2 = \frac{\mathcal{G}_{max} - \mathcal{G}_{out}}{a_{out} - R}, \\ \mathcal{M}_{int} = \int_{a_{in}}^R \Sigma(a) a da, & \mathcal{M}_{out} = \int_R^{a_{out}} \Sigma(a) a da, \\ \mathcal{G}_{in} = \mathcal{G}(R, Z; a_{in}, h(a_{in})), & \mathcal{G}_{out} = \mathcal{G}(R, Z; a_{out}, h(a_{out})), & \mathcal{G}_{max} = \mathcal{G}(R, Z; R, h(R)), \end{cases} \quad (5.3)$$

où $h(a)$ est définie par l'équation 4.25 (cf chapitre précédent) et \mathcal{G}_{in} et \mathcal{G}_{out} sont les valeurs de la fonction GAM, respectivement, au bord interne et externe du système. Ces deux quantités s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{in} = \frac{1}{h(a_{in})} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{\frac{a_{in}}{R}} k_{in} \mathbf{K}(k_{in}) dz, \\ \mathcal{G}_{out} = \frac{1}{h(a_{out})} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{\frac{a_{out}}{R}} k_{out} \mathbf{K}(k_{out}) dz, \end{cases} \quad (5.4)$$

avec k_{in} et k_{out} , les modules des intégrales elliptiques aux bords interne et externe, définis comme ceci :

$$\begin{cases} k_{in} = \frac{2\sqrt{a_{in}R}}{\sqrt{(a_{in} + R)^2 + (Z - z)^2}}, \\ k_{out} = \frac{2\sqrt{a_{out}R}}{\sqrt{(a_{out} + R)^2 + (Z - z)^2}}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Pour certaines configurations, comme le tore de section circulaire par exemple, $h = 0$ au bord interne et au bord externe, donc k_{in} et k_{out} ne dépendent plus de z . Nous avons donc une forme algébrique pour \mathcal{G}_{in} et \mathcal{G}_{out} .

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{in} = 2\sqrt{\frac{a_{in}}{R}}k_{in}\mathbf{K}(k_{in}), \\ \mathcal{G}_{out} = 2\sqrt{\frac{a_{out}}{R}}k_{out}\mathbf{K}(k_{out}). \end{cases} \quad (5.6)$$

Ce type de configurations est particulièrement avantageux. Dans les cas de systèmes réalistes, on s'attend à ce que $h \rightarrow 0$ aux bords. Cela ne sera pas le cas pour le tore de section carrée par exemple, qui a des bords francs et nets. En effet sur les bords z tombe à 0 mais de manière discontinue. Il faut donc faire le calcul intégral sur z pour \mathcal{G}_{in} et \mathcal{G}_{out} . Or la forme fermée pour cette intégrale n'est pas connue. Un autre terme qui apparaît est \mathcal{G}_{max} , la valeur de la fonction GAM au point $a = R$:

$$\mathcal{G}_{max} = \frac{1}{h} \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k) dz. \quad (5.7)$$

En ce point, $k \sim 1$ et nous pouvons donc remplacer $\mathbf{K}(k)$ par son développement au premier ordre, au voisinage de $k \sim 1$ (voir Eq. 3.19 du chapitre 3, section I).

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{max} &= \frac{1}{h} \int_{z_-}^{z_+} \left[\ln 4 - \ln \frac{|Z - z|}{\sqrt{4R^2 + (Z - z)^2}} \right] dz, \\ &= \frac{1 \ln 4}{h} \int_{z_-}^{z_+} dz - \frac{1}{h} \int_{z_-}^{z_+} \ln \left[\frac{|Z - z|}{2R} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(Z - z)^2}{4R^2}}} \right) \right] dz. \end{aligned} \quad (5.8)$$

En supposant que $(Z - z)^2 \ll 4R^2$, nous faisons un développement limité de $\sqrt{1 + \frac{(Z - z)^2}{4R^2}}$, puis nous négligeons le terme d'ordre 2, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{max} &\simeq 2 \ln 4 - \frac{1}{h} \int_{z_-}^{z_+} \ln \left[\frac{|Z - z|}{2R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(Z - z)^2}{4R^2} \right) \right] dz, \\ &\simeq 2 \ln 4 - \frac{1}{h} \int_{z_-}^{z_+} \ln \frac{|Z - z|}{2R} dz, \\ &\simeq 2 \ln 4 + \frac{1}{h} \int_{z_-}^{z_+} \ln \frac{2R}{h} dz - \frac{1}{h} \int_{z_-}^{z_+} \ln \frac{|Z - z|}{h} dz, \\ &\simeq 2 \ln \frac{8R}{h} - \frac{1}{h} \int_{z_-}^{z_+} \ln \frac{|Z - z|}{h} dz. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Afin de calculer le deuxième terme de \mathcal{G}_{max} , nous devons découper l'intégrale en deux, le terme $|Z - z|$ n'ayant pas le même signe sur tout l'intervalle d'intégration $[z_-, z_+]$. En effet, sur l'intervalle $[z_-, Z]$, $Z - z > 0$, alors que sur l'intervalle $[Z, z_+]$, $Z - z < 0$. Nous

avons ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{z_-}^{z_+} \ln \frac{|Z - z|}{h} dz &= \int_{z_-}^Z \ln \frac{Z - z}{h} dz + \int_Z^{z_+} \ln \frac{z - Z}{h} dz, \\ &= h \left[\frac{Z - z_-}{h} - \left(\frac{Z - z_-}{h} \right) \ln \left(\frac{Z - z_-}{h} \right) \right] + h \left[\frac{z_+ - Z}{h} - \left(\frac{z_+ - Z}{h} \right) \ln \left(\frac{z_+ - Z}{h} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Rappelons que le système étudié est symétrique par rapport au plan médian, donc $z_- = -h(a)$ et $z_+ = h(a)$. Ici nous sommes en $a = R$, donc $h \equiv h(R)$. Après réarrangement des termes, nous avons pour \mathcal{G}_{max} , l'expression suivante :

$$\mathcal{G}_{max} \simeq 2 \ln \left(\frac{8R}{h} \right) + \left\{ 2 - \frac{Z}{h} \ln \left[\frac{Z + h}{h - Z} \right] - \ln \left[\frac{(Z + h)(h - Z)}{h^2} \right] \right\} \quad (5.11)$$

Afin de vérifier notre calcul, nous pouvons nous placer dans le cas du tore de section circulaire, dont les paramètres sont définis sur la figure 4.6 du chapitre 4, section II-1 et sur le tableau 4.1 et calculer \mathcal{G}_{max} au point A de coordonnées ($R = 0.75, Z = 0$). Nous obtenons en ce point l'expression de \mathcal{G}_{max} suivante :

$$\mathcal{G}_{max} \simeq 2 \left[\ln \left(\frac{8R}{h} \right) + 1 \right]. \quad (5.12)$$

En prenant $a_{in} = 0.5$, $a_{out} = 1$ et $h = 0.25$, nous avons $\mathcal{G}_{max} \simeq 8.35$. Sur la figure 4.7, qui représente la fonction GAM pour le tore que l'on étudie, la valeur de \mathcal{G}_{max} est de 8.32. L'erreur faite sur cette valeur est inférieure au pour-cent. Nous en faisons donc une bonne approximation.

2 Test

Cette fonction par morceaux (équation 5.1), que nous appellerons \mathcal{G}_d , est comparée à la fonction GAM exacte \mathcal{G} , donnée par l'équation 4.23, sur la figure 5.1 où nous avons considéré le tore de section circulaire (figure 4.6 du chapitre 4) au point A. L'écart entre les deux courbes est également reporté. Nous remarquons que la différence entre les deux courbes est faible et n'excède pas 4%. D'autres tests ont été effectués à différents endroits du tore. Nous avons constaté que l'approximation se dégrade lorsque l'on se trouve sur les bords du disque. Il nous faudrait peut-être donc pousser notre calcul à l'ordre deux, c'est à dire faire une approximation non pas linéaire mais quadratique.

3 Vers une expression algébrique pour le tore circulaire ?

Le potentiel gravitationnel interne peut donc s'exprimer via l'expression donnée par l'équation 5.2. Pour un tore homogène en effet, $\Sigma(a) = 2h(a)$, avec $h(a) = \sqrt{R_0^2 - (a - R_c)^2}$ équation de surface du tore. Si nous notons $2R_c = a_{out} - a_{in}$ la coordonnée radiale du centre du tore et $2R_0 = a_{out} - a_{in}$ le diamètre du tore, nous avons donc :

$$\begin{aligned} \Psi(R, Z) &\sim \int_{a_{in}}^R 2\sqrt{R_0^2 - (a - R_c)^2} [\alpha_1(a - a_{in}) + \mathcal{G}_{in}] da, \\ &\quad + \int_R^{a_{out}} 2\sqrt{R_0^2 - (a - R_c)^2} [\alpha_2(a_{out} - a) + \mathcal{G}_{out}] da. \end{aligned} \quad (5.13)$$

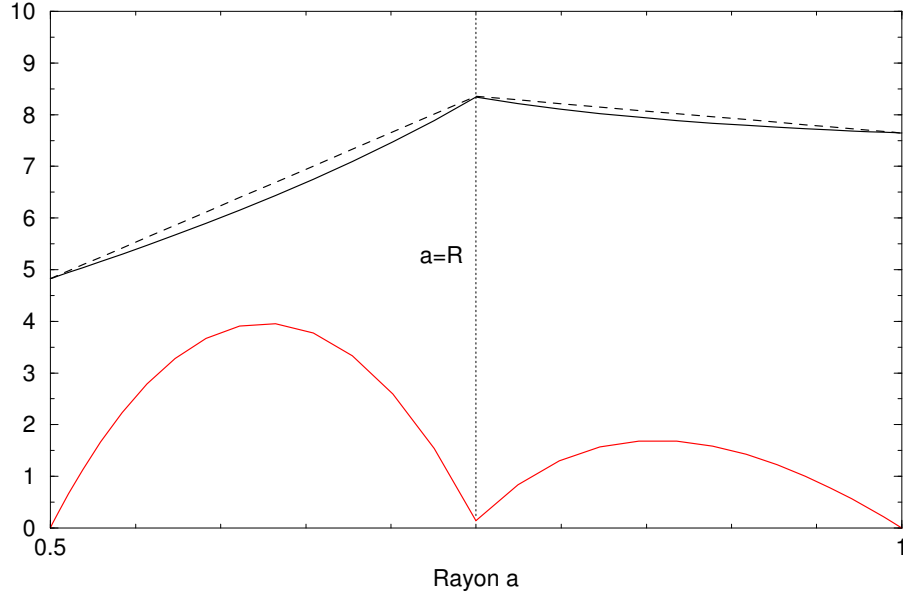


FIGURE 5.1 – Représentation de la fonction GAM exacte (en trait plein) et de la fonction \mathcal{G}_d (en tiret) en fonction du rayon a pour le tore de section circulaire défini par la figure 4.6 et le tableau 4.1 du chapitre 4. En rouge est tracé le pourcentage d’erreur entre les deux courbes.

Nous posons pour la première intégrale $X = a - a_{in}$, donc $dX = da$, et pour la seconde $Y = a_{out} - a$, donc $dY = -da$, ce qui transforme l’équation 5.13 en l’équation suivante :

$$\begin{aligned} \Psi(R, Z) \sim & 2 \int_0^{R-a_{in}} \sqrt{R_0^2 - (X - R_0)^2} [\alpha_1 X + \mathcal{G}_{in}] dX, \\ & + 2 \int_0^{a_{out}-R} \sqrt{R_0^2 - (R_0 - Y)^2} [\alpha_2 Y + \mathcal{G}_{out}] dY. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ces deux intégrales ont toutes deux des expressions analytiques. Pour la première intégrale de l’équation 5.14, nous avons :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{R-a_{in}} \sqrt{R_0^2 - (X - R_0)^2} [\alpha_1 X + \mathcal{G}_{in}] dX = & \left[-\frac{2}{3} \alpha_1 (2R_0 X - X^2)^{\frac{3}{2}} \right. \\ & \left. + \sqrt{2R_0 X - X^2} (X - R_0) (\mathcal{G}_{in} + \alpha_1 R_0) + \arctan \left(\frac{X - R_0}{\sqrt{2R_0 X - X^2}} \right) (\alpha_1 R_0^3 + \mathcal{G}_{in} R_0^2) \right]_0^{R-a_{in}}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

et pour la seconde intégrale nous avons :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{a_{out}-R} \sqrt{R_0^2 - (R_0 - Y)^2} [\alpha_2 Y + \mathcal{G}_{out}] dY = & \left[-\frac{2}{3} \alpha_2 (2R_0 Y - Y^2)^{\frac{3}{2}} \right. \\ & \left. + \sqrt{2R_0 Y - Y^2} (Y - R_0) (\mathcal{G}_{out} + \alpha_2 R_0) + \arctan \left(\frac{Y - R_0}{\sqrt{2R_0 Y - Y^2}} \right) (\alpha_2 R_0^3 + \mathcal{G}_{out} R_0^2) \right]_0^{a_{out}-R}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

En regroupant ces deux intégrales, nous obtenons une forme algébrique pour le potentiel d’un tore homogène de section circulaire. Ceci n’est valable que sous certaines conditions :

- faible extension radiale du système,
- h tombe à 0 sur les bords,
- masse volumique homogène.

Ce résultat reste toutefois encore à être validé. Il doit être comparé à une solution de référence (méthode de splitting, intégrale de contour selon Ansorg *et al.* (2003).

II Cas des disques géométriquement minces et anneaux

La principale hypothèse que nous avons posée est l'indépendance verticale de la masse volumique. Il est vrai que, excepté pour des configurations académiques donc peu réalistes, cette hypothèse peut sembler restrictive. Dans le cas des disques minces, le profil de densité vertical est généralement gaussien (Dubrulle, 1992; Shakura and Sunyaev, 1973) ou uniforme (Collin-Souffrin and Dumont, 1990). Mais comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, section III, la formule 4.23 reste très peu sensible à la stratification verticale. L'hypothèse des disques minces suppose que leur épaisseur $2h(a) \equiv z_+ - z_- = \zeta_- - \zeta_+$ est petite devant le rayon a en tout point du disque. Cette hypothèse nous permet de faire plusieurs développements intéressants. Nous pouvons en effet construire une approximation de la fonction GAM (et donc du potentiel gravitationnel associé). Cette approximation a aussi pour but de diminuer le degré de l'intégrale (double sur la surface méridionale), et donc de la transformer en une intégrale simple sur le contour. Nous nous intéressons au premier terme de droite de l'équation 4.23, c'est à dire à :

$$\int_{z_-}^{z_+} k\mathbf{E}(k) dz. \quad (5.17)$$

1 Développement de Taylor de la fonction $k\mathbf{E}(k)$

L'hypothèse du disque mince peut se traduire également par $\zeta_{\pm}^2 \ll (a+R)^2$. En faisant un développement limité, nous obtenons pour k_+ et k_- les résultats suivants :

$$k_+ = \frac{2\sqrt{aR}}{a+R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta_+^2}{(a+R)^2} \right) = m \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta_+^2}{(a+R)^2} \right), \quad (5.18)$$

et

$$k_- = \frac{2\sqrt{aR}}{a+R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta_-^2}{(a+R)^2} \right) = m \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta_-^2}{(a+R)^2} \right). \quad (5.19)$$

Il faut remarquer que k_+ et k_- sont toujours très proches l'un de l'autre. Afin d'obtenir une approximation qui soit valide dans tout l'espace (et pas seulement aux alentours du disque), nous avons trouvé préférable de travailler avec le module "moyen" \tilde{k} , défini par :

$$\tilde{k} = \frac{k_+ + k_-}{2}, \quad (5.20)$$

et qui a l'avantage de ne jamais atteindre l'unité. Ce module moyen permet d'éviter toute divergence éventuelle des intégrales elliptiques. Ceci est vrai partout sauf en un point où $z_+ = z_- = Z = 0$, ce qui arrive lorsque que l'on veut calculer le potentiel gravitationnel dans le plan médian aux rayons où l'épaisseur est nulle. C'est précisément le cas des bords où on s'attend à ce que la masse volumique ρ s'annule (vrai dans des cas réalistes),

ce qui permet d'annuler les divergences logarithmiques des intégrales elliptiques. Nous pouvons donc dire que $\tilde{k} < 1$ pour des configurations réalistes. Nous effectuons alors un développement de Taylor, au premier ordre, de $k\mathbf{E}(k)$ autour de \tilde{k} . Ceci n'est possible que si la fonction est dérivable en tout point. Ce n'est pas le cas de $\mathbf{E}(k)$ en $k = 1$. En effet, d'après la définition de la dérivée de la fonction $\mathbf{E}(k)$, définie en Annexe A, la dérivée de la fonction $k\mathbf{E}(k)$ en fonction de k vaut :

$$\frac{dk\mathbf{E}(k)}{dk} = 2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k). \quad (5.21)$$

En $k = 1$, $\mathbf{K}(k)$ diverge. $\mathbf{E}(k)$ n'est donc pas dérivable en $k = 1$. Or ici k n'atteint jamais l'unité donc le développement de Taylor est possible. Nous obtenons :

$$k\mathbf{E}(k) \approx \tilde{k}\mathbf{E}(\tilde{k}) + \frac{d}{dk} k\mathbf{E}(k)|_{\tilde{k}} (k - \tilde{k}). \quad (5.22)$$

L'équation 5.22 devient donc :

$$k\mathbf{E}(k) \approx \tilde{k}\mathbf{E}(\tilde{k}) + [2\mathbf{E}(\tilde{k}) - \mathbf{K}(\tilde{k})] (k - \tilde{k}). \quad (5.23)$$

La troncature au premier ordre du développement de Taylor produit une erreur de l'ordre de $(k - \tilde{k})^2$. En réinjectant l'équation 5.23 dans l'équation 5.17, nous avons :

$$\int_z k\mathbf{E}(k) dz = \int_z \left\{ \tilde{k}\mathbf{E}(\tilde{k}) + [2\mathbf{E}(\tilde{k}) - \mathbf{K}(\tilde{k})] (k - \tilde{k}) \right\} dz, \quad (5.24)$$

où z n'est présent que dans le terme k . Les autres termes peuvent donc sortir de l'intégrale. En regroupant les termes, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_z k\mathbf{E}(k) dz &= \tilde{k} [\mathbf{K}(\tilde{k}) - \mathbf{E}(\tilde{k})] \int_z dz + [2\mathbf{E}(\tilde{k}) - \mathbf{K}(\tilde{k})] \int_z k dz, \\ &= \mathbf{T}_1(\tilde{k})z + \mathbf{T}_2(\tilde{k}) \int_z k dz, \end{aligned} \quad (5.25)$$

où nous avons défini

$$\mathbf{T}_1(k) = k [\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)], \quad (5.26)$$

et

$$\mathbf{T}_2(k) = [2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k)]. \quad (5.27)$$

Les deux fonctions $\mathbf{T}_1(k)$ et $\mathbf{T}_2(k)$ sont tracées sur la figure 5.2. Nous pouvons noter qu'elles divergent logarithmiquement lorsque $k \rightarrow 1$; ceci est dû à la présence de la fonction $\mathbf{K}(k)$ dans les deux expressions. Cette divergence potentielle n'est toutefois pas un problème étant donné que, comme nous l'avons précisé précédemment, le module \tilde{k} est toujours strictement plus petit que 1. Enfin, nous avons :

$$\int_z k dz = -2\sqrt{aR} \operatorname{argsh} \left(\frac{Z - z}{a + R} \right). \quad (5.28)$$

L'intégrale de $k\mathbf{E}(k)$ peut être estimée avec une bonne précision. Nous avons donc finalement :

$$\begin{aligned} \int_{z_-}^{z_+} k\mathbf{E}(k) dz &\approx \mathbf{T}_1(\tilde{k})(z_+ - z_-) + \mathbf{T}_2(\tilde{k}) \left[-2\sqrt{aR} \operatorname{argsh} \left(\frac{Z - z_+}{a + R} \right) + 2\sqrt{aR} \operatorname{argsh} \left(\frac{Z - z_-}{a + R} \right) \right], \\ &\approx 2h\mathbf{T}_1(k) - 2\sqrt{aR}\mathbf{T}_2(k) \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{Z - h}{a + R} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{Z + h}{a + R} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

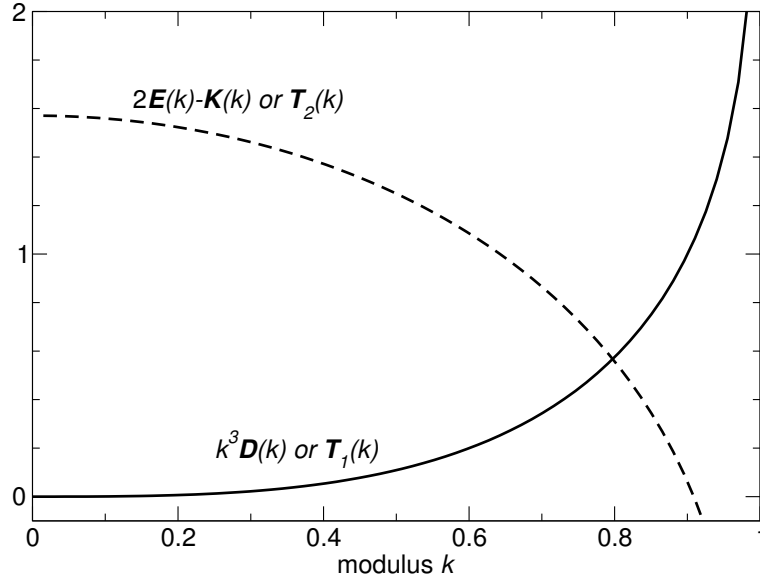


FIGURE 5.2 – Variation de $\mathbf{T}_1(k)$ et $\mathbf{T}_2(k)$ en fonction du module k . Ces deux fonctions divergent logarithmiquement lorsque $k \rightarrow 1$.

2 Expression approchée de la fonction GAM. Estimation de l'erreur

En insérant l'expression de l'intégration verticale de $k\mathbf{E}(k)$ donnée par 5.29 dans l'équation 4.23, nous obtenons l'approximation suivante pour la fonction GAM :

$$\mathcal{G}_{app}(a, z_{\pm}) = 2\sqrt{\frac{a}{R}} \left\{ \mathbf{T}_1(\tilde{k}) - \mathbf{T}_2(\tilde{k}) \frac{\sqrt{aR}}{h} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{Z-h}{a+R} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{Z+h}{a+R} \right) \right] - \left(\frac{Z-h}{2h} \right) \mathbf{H}(m, k_+) + \left(\frac{Z+h}{2h} \right) \mathbf{H}(m, k_-) \right\}, \quad (5.30)$$

où \tilde{k} est donné par l'équation 5.20. Du fait que la troncature du développement de Taylor étant de l'ordre de $(k - \tilde{k})^2$, l'erreur produite sur la fonction \mathcal{G}_{app} est de l'ordre de $\frac{1}{h} \int_z (k - \tilde{k})^2 dz$. Estimons-la à présent. Tant que $\zeta_{\pm}^2 \ll (a+R)^2$, le module k vaut :

$$k \approx m \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{(a+R)^2} \right). \quad (5.31)$$

D'après l'équation 5.18, une approximation de \tilde{k} est :

$$\tilde{k} \approx \frac{m}{2} \left(1 - \frac{\zeta_+^2}{(a+R)^2} \right) + \frac{m}{2} \left(1 - \frac{\zeta_-^2}{(a+R)^2} \right), \quad (5.32)$$

$$\approx m \left(1 - \frac{\zeta_+^2 + \zeta_-^2}{4(a+R)^2} \right). \quad (5.33)$$

Comme $\zeta_+ = Z - h$ et $\zeta_- = Z + h$, nous avons

$$\zeta_+^2 + \zeta_-^2 = 2(Z^2 + h^2). \quad (5.34)$$

Donc

$$\tilde{k} \approx m \left(1 - \frac{Z^2 + h^2}{2(a + R)^2} \right), \quad (5.35)$$

ce qui nous donne pour $(k - \tilde{k})^2$, l'expression suivante :

$$\begin{aligned} (k - \tilde{k})^2 &\approx \left\{ m \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{(a + R)^2} \right] - m \left[1 - \frac{Z^2 + h^2}{2(a + R)^2} \right] \right\}^2, \\ &\approx \left[\frac{m}{2(a + R)^2} (h^2 + 2Zz - z^2) \right]^2, \\ &\approx \frac{m^2}{4(a + R)^4} (h^4 + 4h^2Zz + (4Z^2 - 2h^2)z^2 - 4Zz^3 + z^4). \end{aligned} \quad (5.36)$$

L'erreur faite sur la fonction GAM vaut donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{-h}^h (k - \tilde{k})^2 dz &\approx \frac{m^2}{4h(a + R)^4} \left(\int_{-h}^h h^4 dz + \int_{-h}^h 4h^2Zz dz + \int_{-h}^h (4Z^2 - 2h^2)z^2 dz \right. \\ &\quad \left. - \int_{-h}^h 4Zz^3 dz + \int_{-h}^h z^4 dz \right). \end{aligned}$$

Les deux intégrales dont les intégrandes sont une puissance impaire de z valent 0. Les trois autres intégrales sont aisément calculables :

$$\begin{cases} \int_{-h}^h h^4 dz = 2h^5, \\ \int_{-h}^h (4Z^2 - 2h^2)z^2 dz = \frac{2}{3}(4Z^2 - 2h^2)h^3, \\ \int_{-h}^h z^4 dz = \frac{2}{5}h^5. \end{cases} \quad (5.37)$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation ??, nous obtenons :

$$\frac{1}{h} \int_{-h}^h (k - \tilde{k})^2 dz \approx \frac{m^2}{4h(a + R)^4} \left[2h^5 + (4Z^2 - 2h^2)h^3 + \frac{2}{5}h^5 \right], \quad (5.38)$$

$$\approx \frac{m^2}{(a + R)^4} h^4. \quad (5.39)$$

Ceci veut dire que, dans le cadre des disques minces, l'erreur faite sur la fonction GAM, n'est que de l'ordre de $h^4/(a + R)^4$. On s'attend donc à ce que la fonction GAM approchée soit encore assez bonne pour des disques relativement épais. Le potentiel dans cette approximation s'exprime donc par une seule intégrale sur le rayon :

$$\Psi_{app}(R, Z) = -G \int_a \mathcal{G}_{app}[R, Z; a, z_{\pm}(a)] \Sigma(a) da,$$
(5.40)

dont l'intégrande est régulière.

3 Comportement à longue distance

Afin de valider notre expression nous pouvons dans un premier temps, vérifier comme nous l'avons fait pour notre potentiel exact, si l'équation a le bon comportement à longue distance, c'est-à-dire si elle tend bien vers le potentiel d'une source ponctuelle, $r\Psi = GM$, lorsque $r \rightarrow \infty$. Dans le chapitre précédent, section I-5, nous avons montré que le comportement à longue distance se retrouvait principalement dans le terme $\int_z k \mathbf{E}(k) dz$, la fonction $\mathbf{H}(m, k)$ n'étant qu'une correction du deuxième ordre, se comportant comme k^3 . Nous nous attendons donc à ce que le terme de longue portée soit produit par $\mathbf{T}_1(\tilde{k})$ et $\mathbf{T}_2(\tilde{k})$, c'est ce que nous allons vérifier maintenant. A grande distance du système nous avons :

$$k_{\pm} \approx \frac{2\sqrt{aR}}{r} \left(1 - \frac{aR + Zz_{\pm}}{r^2} \right) \rightarrow 0. \quad (5.41)$$

Ainsi le module moyen est donné par :

$$\tilde{k} \approx \frac{2\sqrt{aR}}{r} \left[1 - \frac{aR + Z(z_+ + z_-)}{r^2} \right], \quad (5.42)$$

$$\approx \frac{2\sqrt{aR}}{r} \left[1 - \frac{aR}{r^2} \right]. \quad (5.43)$$

Rappelons que le développement au premier ordre des intégrales elliptiques de première et deuxième espèces, lorsque leur module tend à s'annuler (Gradshteyn and Ryzhik, 1965) vaut :

$$\begin{cases} \mathbf{K}(k) \sim \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right), \\ \mathbf{E}(k) \sim \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} \right). \end{cases} \quad (5.44)$$

Nous pouvons en déduire le comportement de $\mathbf{T}_1(k)$ et de $\mathbf{T}_2(k)$ dont les expressions sont données par les équations 5.26 et 5.27.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1(k) &\sim \tilde{k} \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\tilde{k}^2}{4} \right) - \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\tilde{k}^2}{4} \right) \right], \\ &\sim \frac{\pi}{4} \tilde{k}^3, \end{aligned} \quad (5.45)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2(k) &\sim \pi \left(1 - \frac{\tilde{k}^2}{4} \right) - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\tilde{k}^2}{4} \right), \\ &\sim \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{3\tilde{k}^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Au premier ordre, nous avons aussi

$$\int_z k dz \sim kz, \quad (5.47)$$

d'où :

$$\mathbf{T}_1(k)(z_+ - z_-) \sim \frac{\pi}{2} h \tilde{k}^3, \quad (5.48)$$

et

$$\mathbf{T}_2(k) \int_{-h}^h k \, dz \sim \pi h \tilde{k} \left(1 - \frac{3\tilde{k}^2}{4} \right). \quad (5.49)$$

Nous remarquons que le terme dominant est $\mathbf{T}_2 \times \int_{-h}^h k \, dz$ étant donné qu'il est proportionnel à \tilde{k} , alors que $\mathbf{T}_1(k)$ et $\mathbf{H}(m, k)$ sont de l'ordre de \tilde{k}^3 . Nous avons donc pour le potentiel l'expression suivante :

$$\Psi(R, Z) \sim -G \int_a \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{\mathbf{T}_2(k)}{h} \int_{-h}^h k \, dz \Sigma(a) \, da, \quad (5.50)$$

$$\sim -G \int_a \pi h \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{\tilde{k}}{h} \Sigma(a) \, da, \quad (5.51)$$

$$\sim -G \int_a \pi \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{2\sqrt{aR}}{r} \Sigma(a) \, da, \quad (5.52)$$

$$\sim -\frac{G}{r} \int_a 2\pi a \Sigma(a) \, da. \quad (5.53)$$

En notant que

$$M = \int_a 2\pi a \Sigma(a) \, da, \quad (5.54)$$

alors

$$\Psi(R, Z) \sim -\frac{GM}{r}. \quad (5.55)$$

Le potentiel se comporte correctement lorsque que nous sommes loin de la distribution.

4 Application numérique : comportement de \mathcal{G}_{app} vs \mathcal{G}

Nous pouvons vérifier d'une autre manière la qualité de notre approximation, en comparant $\mathcal{G}(R, Z; a, z_{\pm})$ et $\mathcal{G}_{app}(R, Z; a, z_{\pm})$ dans différentes configurations. Pour effectuer cette comparaison, nous considérons un disque mince représenté sur la figure 4.8 du chapitre 4, section II-1 et par le tableau 4.1. Pour montrer le comportement de $\mathcal{G}(R, Z; a, z)$ et de $\mathcal{G}_{app}(R, Z; a, z)$ qui dépendent de R et Z , nous avons sélectionné 3 points A, B et C définis par les coordonnées suivantes :

- Point A (0.8; 0) à l'intérieur du disque (au centre)
- Point B (1.3, 1.3) à l'extérieur
- Point C (10, 10) relativement loin du système

La différence absolue entre $\mathcal{G}(R, Z; a, z)$ et son approximation $\mathcal{G}_{app}(R, Z; a, z)$ est représentée sur la figure 5.3 pour les points A et B et sur la figure 5.4 pour le point C. Conformément au développement utilisé dans la section II-1, l'erreur absolue est de l'ordre de $\frac{1}{h} \int_z (k - \tilde{k})^2 \, dz$. À l'intérieur du système et au voisinage, nous avons trouvé que l'erreur est proportionnelle à $h^4/(a + R)^4$. C'est une erreur relativement faible pour les disques géométriquement minces, les quantités ayant une précision d'environ $(h/a)^2$ en général. Dans le cas étudié ici, h atteint 0.1. Nous nous attendons à ce que l'erreur soit d'environ

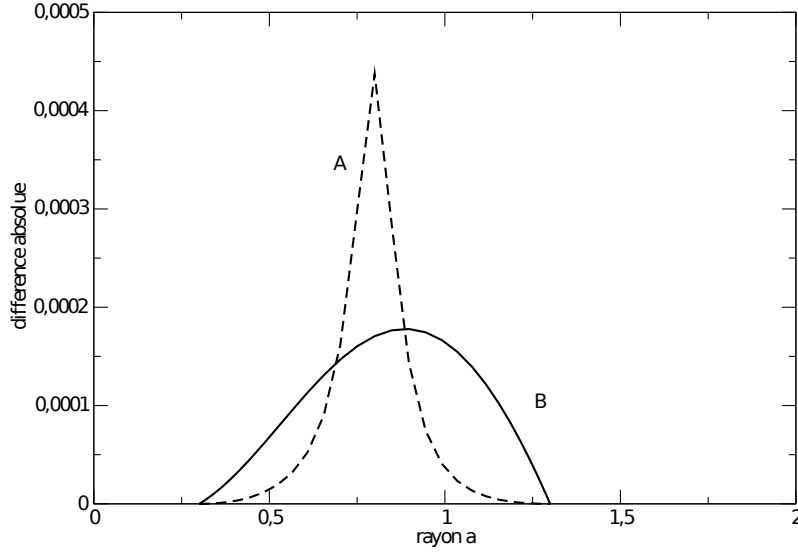


FIGURE 5.3 – Différence absolue entre la fonction $\mathcal{G}(R, Z; a, z)$ calculée avec l'équation 4.23 et son approximation $\mathcal{G}_{app}(R, Z; a, z)$ en fonction du rayon a au point A (pointillé) et au point B (trait plein) pour le disque représenté à la figure 4.8.

10^{-4} , ce qui est effectivement compatible avec ce que nous observons sur la figure 5.3 pour les points A et B.

5 Sensibilité de Ψ_{app} à l'épaisseur du disque

Comme nous l'avons évoqué, l'erreur faite sur la version approchée de la fonction GAM est de l'ordre de $h^4/(a+R)^4$. Nous nous attendons donc à ce que notre approximation soit valable pour des disques minces à des disques relativement épais. C'est ce que nous allons tester dans cette section à travers des cartes d'erreur relative entre le potentiel exact Ψ calculé avec l'équation 4.38 du chapitre 4, section I-5 et le potentiel approché Ψ_{app} (associé à \mathcal{G}_{app}) calculé avec l'équation 5.40. Nous considérons trois disques minces totalement homogènes, dont les caractéristiques sont les mêmes que dans la section précédente, mais nous changeons le rapport d'aspect : $h/a \sim 0.1$, $h/a \sim 0.3$ et $h/a \sim 0.5$. Nous calculons pour chacun de ces disques, une carte de l'erreur relative (en échelle logarithmique) faite sur le potentiel exact en le remplaçant par le potentiel approché. Cette erreur relative ϵ est définie par l'équation 3.37 du chapitre précédent où la référence maintenant est notre expression du potentiel via la fonction GAM (équation 4.23 du chapitre précédent).

Les trois cartes ayant la même échelle, nous remarquons que lorsque nous augmentons le rapport d'aspect du disque, l'erreur faite sur le potentiel augmente. L'erreur est très faible, de l'ordre de $\frac{1}{h} \int_z (k - \tilde{k})^2 dz \times \Delta a$, où Δa est l'extension radiale du disque. La table 5.1 donne un aperçu de l'erreur calculée aux points A et B selon le rapport d'aspect du disque. Notre approximation peut donc être utilisée pour des disques relativement épais, l'erreur étant encore très correcte inférieure à 1%.

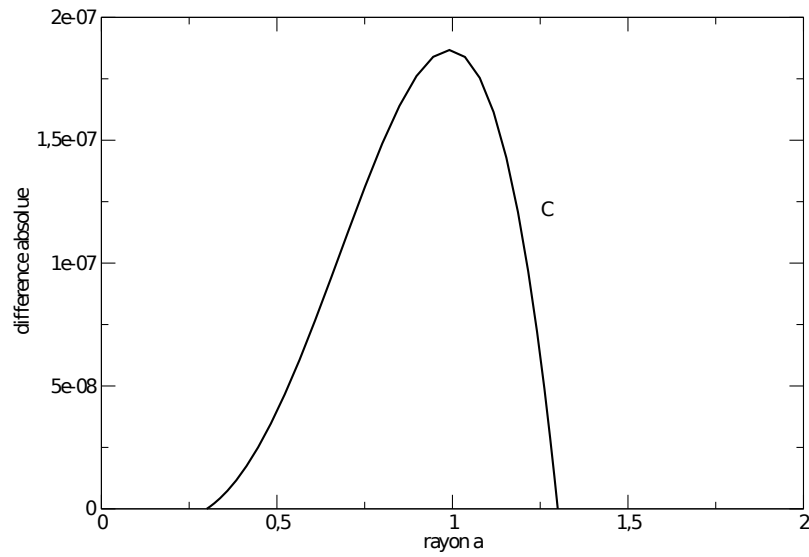


FIGURE 5.4 – Différence absolue entre la fonction $\mathcal{G}(R, Z; a, z)$ calculée avec l'équation 4.23 et son approximation $\mathcal{G}_{app}(R, Z; a, z)$ en fonction du rayon a au point C pour le disque représenté à la figure 4.8.

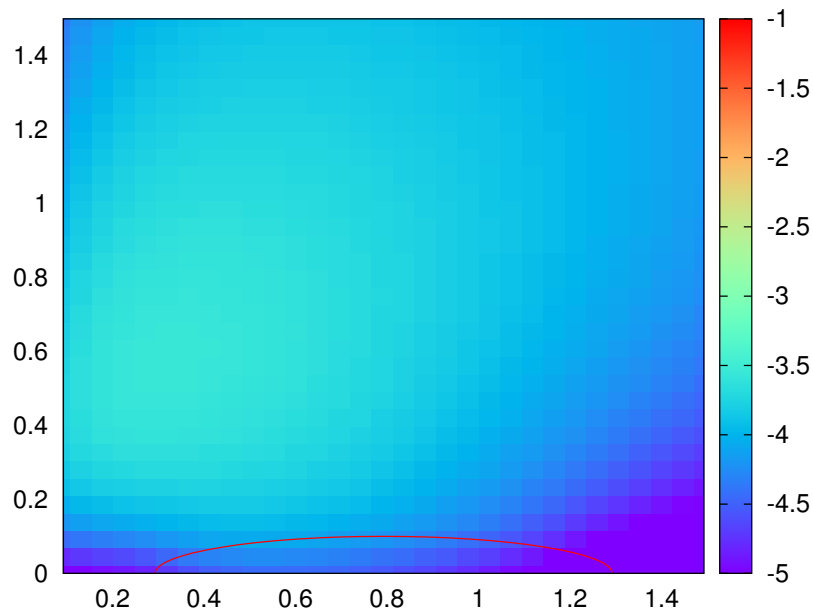


FIGURE 5.5 – Carte représentant l'erreur relative (échelle logarithmique) entre le potentiel exact Ψ calculé avec l'équation 4.38 et le potentiel approché Ψ_{app} calculé avec l'équation 5.40 pour un disque mince de rapport d'aspect $h/a \sim 0.1$.

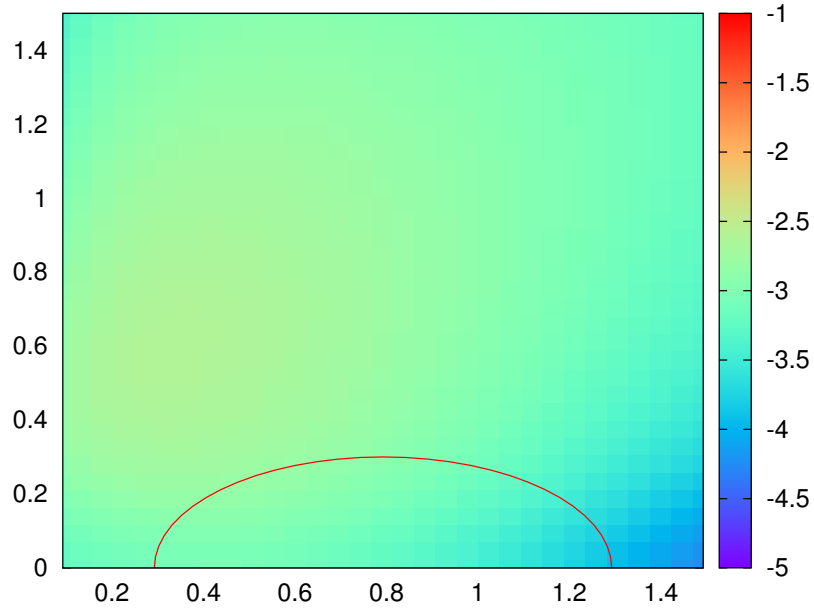


FIGURE 5.6 – Même carte que la figure 5.5 mais pour un disque mince de rapport d’aspect $h/a \sim 0.3$.

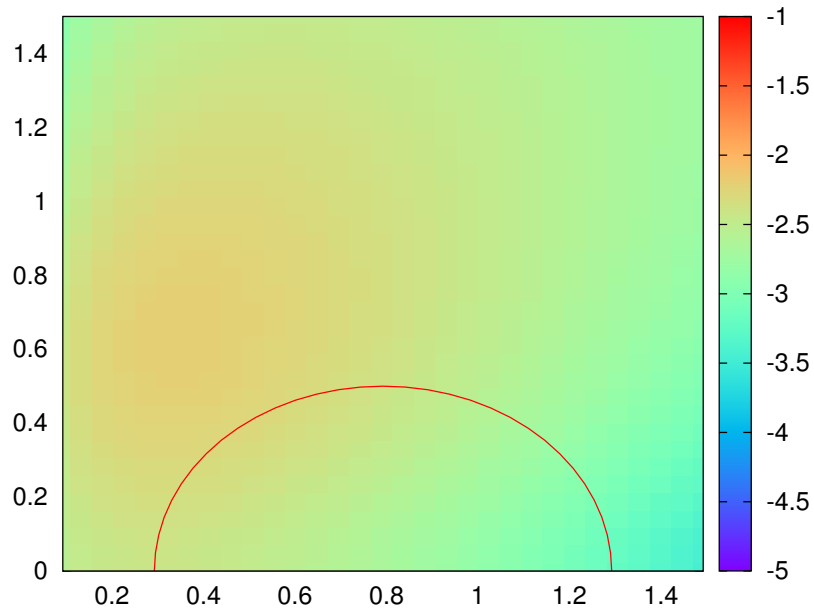


FIGURE 5.7 – Même carte que la figure 5.5 mais pour un disque mince de rapport d’aspect $h/a \sim 0.5$.

III Conclusion

A partir de la fonction de GAM, nous avons construit une formule algébrique donnant le potentiel approché pour des systèmes de faibles extensions radiales. Cette forme fermée

| Rapport d'aspect | Erreur au point A | Erreur au point B |
|------------------|----------------------|----------------------|
| $h \sim 0.1$ | 2.9×10^{-5} | 9.3×10^{-5} |
| $h \sim 0.3$ | 5.8×10^{-4} | 8.3×10^{-4} |
| $h \sim 0.5$ | 2.2×10^{-3} | 2.3×10^{-3} |

TABLE 5.1 – Erreur sur le potentiel aux points A et B pour trois modèles de disques de rapport d'aspect différents.

est donc très intéressante d'un point de vue numérique mais aussi d'un point de vue théorique. Cette dernière reste toutefois à être validée. Plusieurs perspectives restent à approfondir :

- Y-a-t'il d'autres formes d'objet qui peuvent être approchées de la même manière ?
Forme de losange par exemple ?
- d'autres profils de densité $\Sigma(a)$ permettent-ils d'obtenir également une forme fermée, comme des profils en loi de puissance du rayon, généralement utilisées dans les simulations de disques ?

Nous avons également construit une approximation du potentiel d'auto-gravitation pour les disques minces et les anneaux, qui permet de l'exprimer via une intégrale simple sur le rayon, de fonctions totalement régulières. Cette approximation est donc intéressante d'un point de vue numérique, étant donné qu'il n'y a qu'une seule intégrale à calculer. Celle-ci peut être calculée via une simple méthode des trapèzes, étant donné que son intégrande ne possède aucune singularité. L'approximation étant valable dans tout l'espace, elle peut être utilisée, non seulement pour modéliser la structure interne des disques auto-gravitants, mais aussi pour des études dynamiques (Šubr and Karas, 2005; Tresaco *et al.*, 2011).

Deuxième partie

Effets de bords

Chapitre 6

Champ local vs champ global

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| I | Composante verticale du champ de gravité pour un disque verticalement homogène | 100 |
| 1 | Vers une approximation locale de g_z ? | 100 |
| 2 | Estimation du terme $\int_a B(R, Z; a, z) da$ | 102 |
| II | Le plan infiniment étendu et l'approximation de "Paczynski" (Paczynski, 1978a) | 103 |
| 1 | Effet local du champ de gravité | 103 |
| 2 | Effet non local : concentration de la matière au bord interne . . | 107 |
| III | Conclusion | 108 |

Cette troisième partie est dédiée à l'étude du champ d'auto-gravité \mathbf{g} des disques minces et plus particulièrement de sa composante verticale g_z . Comme nous l'avons mentionné en introduction, cette composante joue un rôle clé dans l'équilibre hydrostatique. Elle est donc un ingrédient essentiel dans la détermination de la structure verticale d'un disque ou encore de sa pression. Ici, nous allons reprendre l'hypothèse forte posée précédemment, à savoir, l'homogénéité verticale de la densité.

Par définition, le champ de gravité est le gradient du potentiel gravitationnel (cf équation 1.9 ; chapitre 2). Le champ de gravité est donné sous forme intégrale par la relation suivante :

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} d^3 \mathbf{r}', \quad (6.1)$$

où $d^3 \mathbf{r}' = a da d\theta' dz$ est l'élément de volume élémentaire, ici, en coordonnées cylindriques. Sous l'hypothèse de la symétrie de révolution, le noyau s'intègre parfaitement dans la direction azimutale et fait apparaître l'intégrale elliptique de seconde espèce (cf définition en Annexe A). Le champ se réduit ainsi à l'intégrale double suivante (e.g. Durand, 1953) :

$$g_z = \int_a \int_z \frac{\rho(a, z) G(Z - z)}{2R\sqrt{aR}} \frac{k^3 \mathbf{E}(k)}{k'^2} da dz, \quad (6.2)$$

qui s'étend sur la section méridionale du système. Ici, k est le module, donné par l'équation 3.10 dans le chapitre 3, section I. Comme pour le potentiel, le noyau de 6.2 est singulier lorsque $k = 1$. La divergence subsiste via le terme $1/k'$. En effet, lorsque $k \rightarrow 1$, $k' \rightarrow 0$, et nous avons une nouvelle fois, une divergence hyperbolique. Dans cette partie nous

| modèle | demi-épaisseur h | exposant de la densité s | commentaire |
|--------|---------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 1 | $0.1a_{\text{out}}$ | 0 | disque plat et homogène |
| 2 | $0.1a$ | 0 | modèle 1 mais avec h/a constant |
| 3 | $0.1a$ | -2.5 | modèle 2 mais inhomogène |

TABLE 6.1 – Trois modèles de disques, h est la demi-épaisseur et s l'exposant du profil radial en loi de puissance de la masse volumique $\rho(a) \propto a^s$.

cherchons à faire une approximation du champ de gravité. Il ne semble pas que ceci est fait l'objet d'une attention particulière.

I Composante verticale du champ de gravité pour un disque verticalement homogène

En se plaçant dans l'hypothèse d'une masse volumique ρ indépendante de l'altitude z et d'une symétrie par rapport au plan médian, l'intégrale sur z peut être effectuée à nouveau analytiquement. En effet, nous avons (e.g. Durand, 1953) :

$$g_z = \int_a \rho(a) \sqrt{\frac{a}{R}} [k_+ \mathbf{K}(k_+) - k_- \mathbf{K}(k_-)] da, \quad (6.3)$$

où $k_{\pm} \in [0, 1]$ est donné par l'équation 4.24 (cf chapitre 4, section I-3). Rappelons que

- i) ces deux modules dépendent de z_{\pm} (position des bords supérieur et inférieur du disque),
- ii) z_{\pm} comme ρ peuvent dépendre du rayon a .

Nous pouvons noter que l'intégrande de l'équation 6.3 est logarithmiquement divergente à cause de la présence de la fonction $\mathbf{K}(k)$ (cf développement près de $k = 1$ donné par l'équation 3.19 du chapitre 3, section I) mais qu'elle disparaît dans le plan médian (i.e $Z = 0$), quelque soit a et R , car $k_+ = k_-$, ceci en dépit de la divergence de $\mathbf{K}(k)$.

1 Vers une approximation locale de g_Z ?

Analysons de plus près l'intégrande de l'équation 6.3. Notons

$$B(R, Z; a, z) = \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) [k_+ \mathbf{K}(k_+) - k_- \mathbf{K}(k_-)]. \quad (6.4)$$

A cet effet, il est commode de fixer les idées en considérant quelques modèles de disques dont les caractéristiques principales sont données dans le tableau 6.1. Le profil radial que nous utiliserons est en loi de puissance du rayon et défini par la relation suivante :

$$\rho(a) \propto a^s, \quad (6.5)$$

où $s < 0$. Ces types de profils en loi de puissance du rayon sont ceux généralement utilisés dans les simulations de disques (Bell *et al.*, 1997; Hughes *et al.*, 2008). Traçons la fonction $B(R, Z; a, z)$ dans le cas du modèle de disque 1 (défini dans le tableau 6.1) en trois points du disque :

- vers le milieu du disque $R/a_{\text{out}} \sim 0.55$,
- près du bord interne $R/a_{\text{out}} \sim 0.06$,
- près du bord externe $R/a_{\text{out}} \sim 0.98$.

Ces trois points sont à la même altitude $Z = h/2$. La fonction B est tracée en fonction

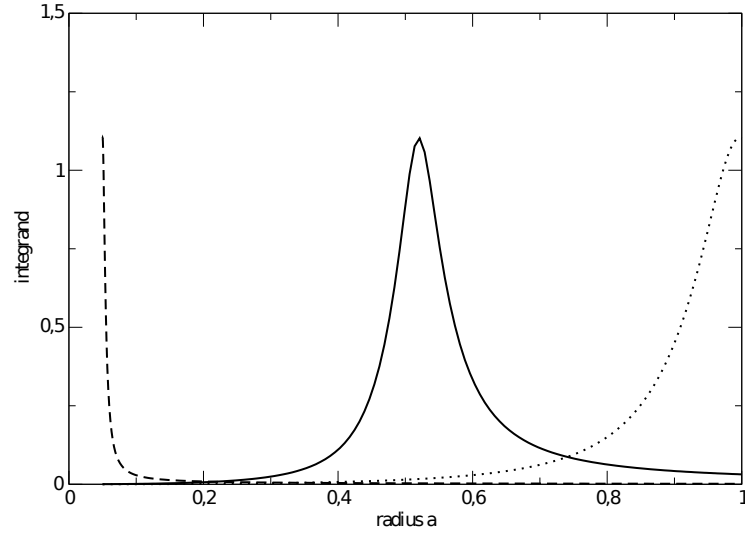


FIGURE 6.1 – Représentation de la fonction $B(R, Z; a, z)$ en trois points du disque d'altitude $Z = h/2$: vers le milieu $R \sim 0.55$ (en trait plein), au bord interne $R \sim 0.06$ (en tiret), au bord externe $R \sim 0.98$ (en pointillé). La fonction est tracée pour le modèle de disque 1 (défini dans le tableau 6.1).

de a sur la figure 6.1. Nous remarquons que la fonction est piquée au point $a = R$. Ce pic donne du poids à la matière située en $a = R$, et il est donc responsable du caractère local de l'auto-gravité. Ce pic est dû à la partie $\ln k'$ de l'intégrale elliptique (cf développement de $\mathbf{K}(k)$ près de la singularité, équation 3.19 du chapitre 3, section I). Nous remarquons également que cette fonction possède des "ailes" qui semblent, dans cet exemple précis, ne pas donner de poids à la matière située sur les bords du disque. On comprend que lorsque l'on va intégrer sur le rayon a , la partie qui va contribuer le plus est la région autour du pic. Nous pourrions donc penser que le calcul de la fonction $B(R, Z; a, z)$ pourrait se limiter à ne seulement considérer que le terme $k_+ \ln k'_+ - k_- \ln k'_-$. C'est inexact : les "ailes" peuvent avoir leur importance si ρ est suffisamment important à large séparation $a \ll R$ ou $a \gg R$. Cela signifie aussi que le système doit avoir une extension radiale notable. Traçons la fonction $B(R, Z; a, z)$ aux mêmes points que précédemment mais pour le modèle de disque 3 avec $s = 3$ (défini dans le tableau 6.1). Ce modèle possède un profil de densité très piqué au bord interne.

La figure 6.2 indique qu'aux trois points considérés les "ailes" ont effectivement pris de l'importance. Notons que près du bord interne, le pic interne est aussi important que le pic en $a = R$, dû au caractère local. Les "ailes" ne peuvent donc pas être négligées, il nous faudra les prendre en compte. En conclusion, on ne peut pas toujours limiter le

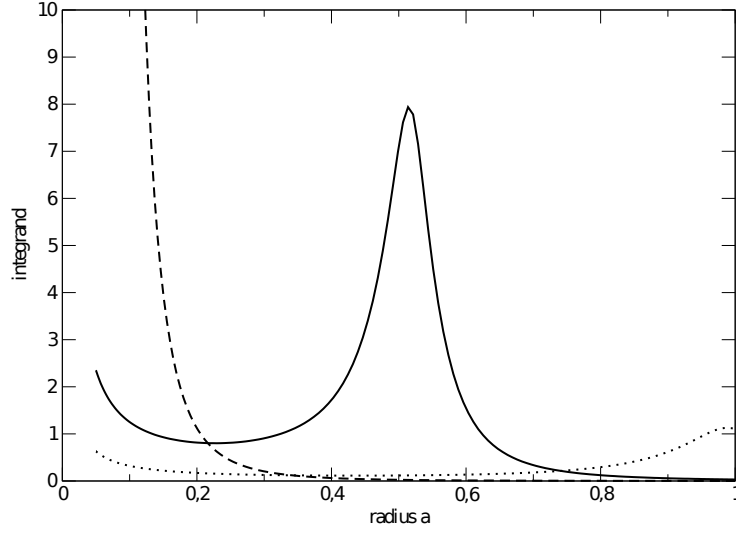


FIGURE 6.2 – Même légende que la figure 6.1 mais pour un profil de densité qui varie en fonction du rayon selon l'équation 6.5 avec $s = 3$.

calcul de g_Z à la seule prise en compte du caractère local de l'auto-gravité, en particulier pour des systèmes radialement inhomogènes.

2 Estimation du terme $\int_a B(R, Z; a, z) da$

L'intégrande de l'équation 6.3 contient la fonction intégrale elliptique complète de première espèce $\mathbf{K}(k)$, ce qui la rend divergente quand $k_+ = k_- = 1$ (i.e en $a = R$ et $Z = z_{\pm}$ à la surface de l'objet). Afin d'évaluer correctement le champ de gravité, nous utilisons la méthode de "double splitting" développée dans Huré (2005) et que nous avons décrite dans le chapitre 3, section I-III. Estimons $\int_a \rho(a) \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k) da$ à l'aide de cette méthode, en remplaçant tout d'abord $\mathbf{K}(k)$ par $\mathbf{K}_{reg}(k) - \ln k'$, ce qui nous permet d'extraire la singularité. \mathbf{K}_{reg} est totalement régulière (cf figure 3.7 du chapitre 3, section I-III). Puis en posant $\sqrt{a/R} \rho(a) = \sqrt{a/R} \rho(a) - \rho(R) + \rho(R)$. Cela donne :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) k \mathbf{K}(k) &= \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) [\mathbf{K}_{reg}(k) - \ln k'], \\ &= \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) \mathbf{K}_{reg}(k) - \left[\sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) - \rho(R) \right] \ln k' - \rho(R) \ln k'. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Les 2 premiers termes sont totalement réguliers, même quand $k = 1$, donc leur intégrale ne pose aucun problème en pratique. Quant au dernier terme, qui s'explique en

$$\int_a \ln k' da = \int_a \ln \sqrt{\frac{(a-R)^2 + [Z-h(a)]^2}{(a+R)^2 + [Z-h(a)]^2}} da. \quad (6.7)$$

il n'en existe aucune forme fermée dans le cas général où h est une fonction de a . Il nous faut découper le calcul en posant :

$$\ln k' = \ln k' - \ln k'|_{a=R} + \ln k'|_{a=R}, \quad (6.8)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) k \mathbf{K}(k) = & \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) \mathbf{K}_*(k) - \left[\sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) - \rho(R) \right] \ln k' \\ & - \rho(R) [\ln k' - \ln k'|_{a=R}] - \rho(R) \ln k'|_{a=R}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le quatrième terme s'intègre numériquement sans souci de divergence et le dernier terme lui s'intègre analytiquement. Pour tout les calculs numériques de la forme référence de g_z nous utiliserons cette approche. Le calcul reste tout de même assez lourd. Dans la littérature, le calcul du champ d'auto-gravité vertical, pour plus de simplicité, est donné par une approximation, à caractère local, que nous allons voir dans la partie qui suit.

II Le plan infiniment étendu et l'approximation de "Paczynski" (Paczynski, 1978a)

1 Effet local du champ de gravité

L'équation de Poisson donne une relation entre le potentiel gravitationnel Ψ et la masse volumique ρ . Cette expression est donnée dans le chapitre 2, section II-1 par l'équation 2.63. Quand la masse volumique ρ est indépendante de l'angle azimutal θ et du rayon a , les gradients azimutaux et radiaux valent zéro, ce qui est le cas d'une plaque infiniment étendue composée de plans homogènes parallèles comme décrit sur la figure 6.3. Dans ce

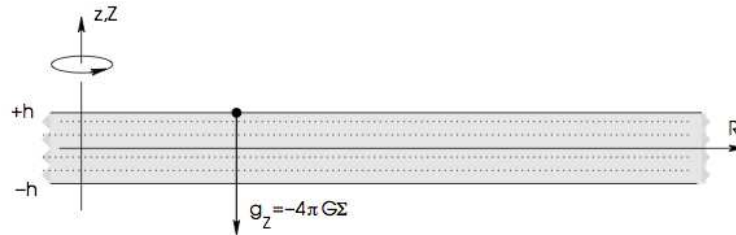


FIGURE 6.3 – modèle de la plaque infiniment étendue.

cas là, l'équation 2.63 se restreint à l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = 4\pi G \rho. \quad (6.10)$$

ρ ne dépendant que de Z , cette équation peut s'intégrer dans la direction verticale. Ce qui nous emmène à :

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right|_Z - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 4\pi G \Sigma(Z), \quad (6.11)$$

où

$$\Sigma(Z) = \int_0^Z \rho(z) dz, \quad (6.12)$$

est la densité surfacique cumulée à partir de $Z = 0$. En ajoutant l'hypothèse de la symétrie de la plaque par rapport au plan médian, on a donc $\left. \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0$. Le champ gravitationnel étant relié au potentiel gravitationnel par l'équation 1.9, sa composante verticale $g_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial Z}$, ce qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$g_z(Z) = -4\pi G \Sigma(Z). \quad (6.13)$$

Cette équation n'est valable que dans le cas d'un disque que l'on découperait en plans parallèles et homogènes 6.3. Ceci ne peut donc pas être une représentation réaliste des disques astrophysiques, qui sont des systèmes de taille et de masse finies. Toutefois, on

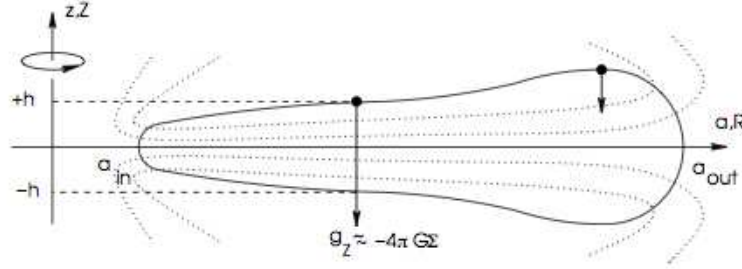


FIGURE 6.4 – Représentation d'un système réaliste.

observe de très nombreux modèles de disques (cf 6.4) qui emploient ce résultat, alors que les hypothèses fortes ci-dessus sont violées (Yang and Liu, 1990; Mayer and Duschl, 2005). Cette approximation est utilisée par la plupart des auteurs dans le contexte de la formation stellaire et des disques d'accrétion dans les noyaux actifs de galaxies, modèles "one-zone" et bi-dimensionnels (Paczynski, 1978b; Pringle, 1981; Shore and White, 1982; Mineshige and Umemura, 1997). On peut donc énoncer "l'approximation de Paczynski" (Paczynski, 1978a) qui est très largement employée : la composante verticale du champ est calculée via l'équation 6.13 pourvu que les gradients radiaux et azimutaux soient négligeables devant les gradients verticaux, soit à satisfaire simultanément les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) \ll \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}, \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \ll \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}. \end{cases} \quad (6.14)$$

En faisant ces deux hypothèses fortes, l'équation 6.11 reste approximativement vraie, ce qui donne une approximation pour le champ de gravité vertical :

$$g_z(Z) \approx -4\pi G \Sigma(Z) \equiv g_z^{\text{Pacz}}. \quad (6.15)$$

En pratique, on s'attend à ce que l'approximation de "Paczynski" soit peu valable dans des zones où les gradients de densité et l'épaisseur du disque varient beaucoup. C'est

ce qui est typiquement le cas sur les bords du disque, ou dans des zones internes aux disques telles que des "gaps" produits par la formation planétaire. Nous pouvons vérifier ce phénomène en comparant l'expression exacte du champ de gravité vertical donnée par l'équation 6.3 avec son approximation donnée par l'équation 6.15. Cette comparaison est représentée sur la figure 6.5. Elle est effectuée à la surface d'un disque mince, de taille finie, de densité constante et de demi-épaisseur h constante (cf modèle de disque 1 dans la table 6.1). Nous remarquons une différence nette entre les deux courbes. Cette différence

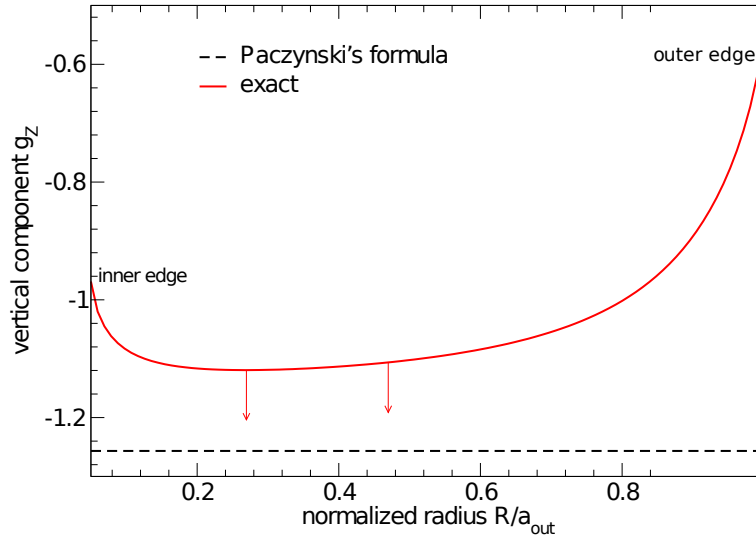


FIGURE 6.5 – Composante verticale g_z du champ d'auto-gravité, pour un disque homogène, calculée avec l'équation 6.3 comparée à l'approximation de Paczynski en fonction du rayon pour $Z = h$ (i.e à la surface du disque). Les paramètres du disque sont les suivants : $a_{in}/a_{out} = 0.05$, masse volumique $\rho = 1$ et la demi-épaisseur $h = 0.1a_{out}$ (cf modèle 1 dans la table 6.1).

s'atténue à mesure que l'on s'éloigne des bords et quand le rapport d'aspect décroît ; c'est ce qui est représenté sur la figure 6.6. Nous remarquons également que la différence est accentuée lorsque l'on se trouve sur les bords du disque, ce qui reste aussi vrai pour des disques plus étendus et/ou minces tels que celui de la figure 6.6. L'approximation de Paczynski surestime le champ d'auto-gravité d'environ un facteur 2 sur les bords. La décroissance du champ sur les bords s'explique par le fait qu'il n'y a plus de matière après le bord externe. La figure 6.7, où nous traçons le rapport :

$$\frac{g_z^{Pacz}}{g_z} = \frac{1}{f}, \quad (6.16)$$

pour les trois modèles de disques définis par le tableau 6.1, nous montre le rapport entre les deux calculs de g_z . Nous remarquons qu'effectivement le rapport entre les deux courbes reste très important surtout sur les bords du disque où le champ de gravité via l'approximation de Paczynski est toujours surestimé. Comme nous l'avons vu dans la section I-1

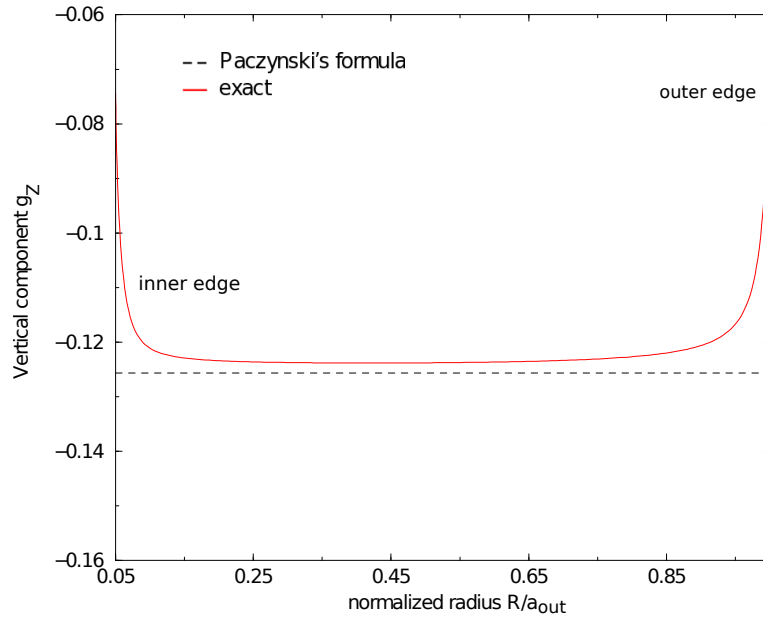


FIGURE 6.6 – Mêmes caractéristiques que la figure 6.5 mais pour $h(a) = 0.01a_{out}$.

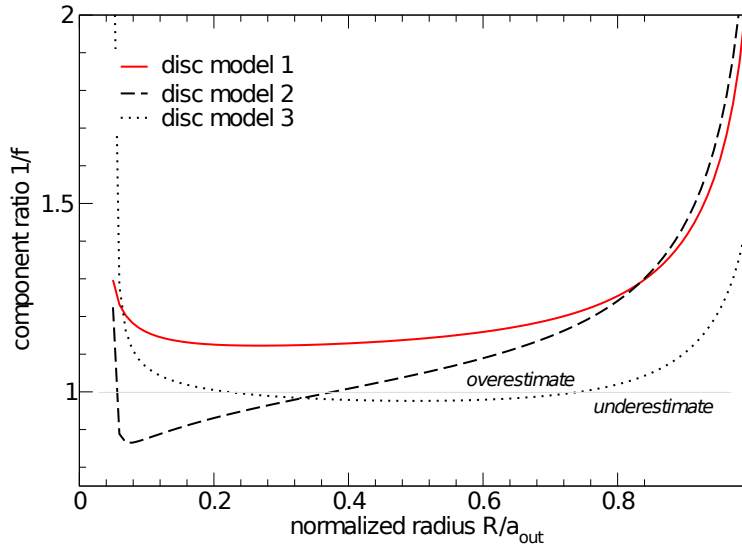


FIGURE 6.7 – Rapport $1/f$ défini par l'équation 6.16 pour les trois modèles de disques définis dans le tableau 6.1. Le rapport d'axe reste le même pour les trois disques $a_{in}/a_{out} = 0.05$.

de ce chapitre, l'effet local ne permet pas à lui seul, pour des disques dont les profils de densité sont piqués au bord interne, de donner une approximation correcte du champ de gravité vertical.

2 Effet non local : concentration de la matière au bord interne

Nous avons vu dans la section 1, que pour des disques radialement inhomogènes (cf modèle 3 du tableau 6.1), un effet non-local peut apparaître. En effet, si la masse contenue près du bord interne est suffisamment importante, alors le bord externe va ressentir les effets du champ de gravité de la distribution à grande séparation, c'est-à-dire le gaz situé à court rayon, et donc,

$$g_Z \approx -\frac{GM_{inner}}{R^2} \times \frac{Z}{R}, \quad (6.17)$$

où M_{inner} est la masse concentrée près du bord interne et qui est plus ou moins proche de la masse totale du disque. Ce champ non-local n'étant pas limité en magnitude, il peut surpasser la contribution locale et la valeur du champ donnée par l'approximation de Paczynski. Ceci pourrait donc impliquer $f > 1$ dans l'équation 6.16. Pour vérifier ce point, nous considérons le modèle de disque 3 pour différents exposants s de la loi de puissance de la masse volumique. La figure 6.8 représente le rapport $1/f$ en fonction de R

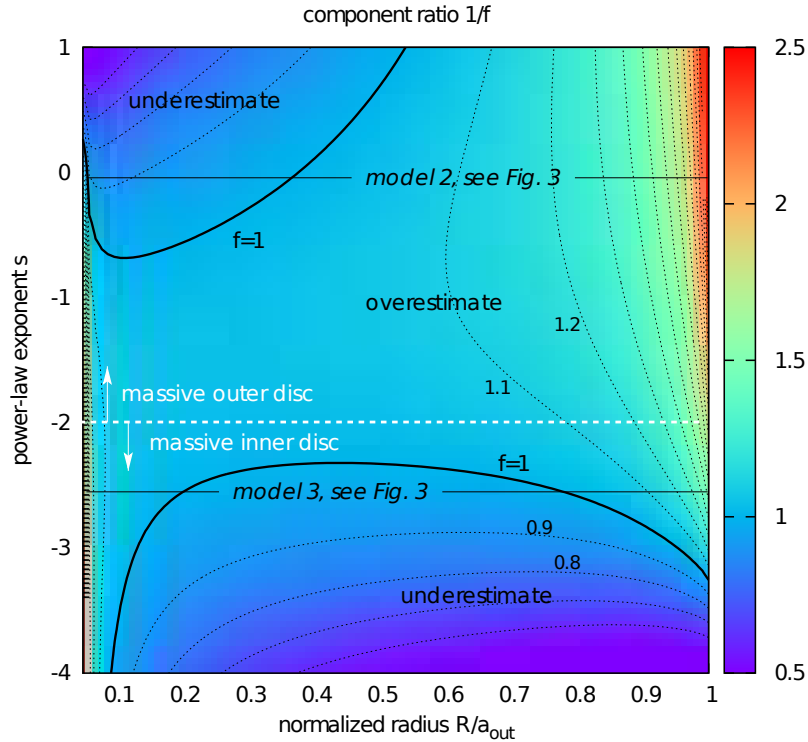


FIGURE 6.8 – Rapport $1/f$ défini par l'équation 6.16 pour le modèle de disque 3 défini dans la table 6.1 mais pour différents exposants s de la loi de puissance du profil de densité radial. $s \in [-4, 1]$. Les contours sont tous les 0.1.

et pour un exposant $s \in [-4, 1]$, qui concerne la plupart des cas d'intérêt astrophysique. Le disque étudié ici a un rapport d'aspect de 0.1 constant et un rapport d'axe identique à ce qui est fait sur la figure 6.5. Nous voyons clairement que plus l'exposant s est élevé, plus la zone $f > 1$ (zone où l'approximation de Paczynski sous-estime le champ de gravité) est importante et donc le champ de gravité du disque interne ne peut être négligé.

III Conclusion

Nous pouvons conclure que la présence des bords rend l'approximation de Paczynski incorrecte de l'ordre d'un facteur 0.5 à 2 selon le profil du disque étudié. Comme nous avons pu le voir, l'effet non-local peut jouer un rôle. Nous allons à présent voir comment améliorer la description du champ vertical près des bords, car ces derniers sont une composante importante des disques, autant pour leur géométrie que pour leur dynamique ("réservoir" du moment angulaire, échappement de la radiation,...). Nous allons donc chercher un terme correctif à la formule du plan parallèle.

Chapitre 7

Extension de l'approximation de Paczynski

Sommaire

| | | |
|------------|--|------------|
| I | Correction au 1er ordre | 109 |
| 1 | Ajustement de la fonction $k\mathbf{K}(k)$ par une fonction de 3 termes | 110 |
| 2 | Approximation de g_Z | 110 |
| 3 | Application aux disques géométriquement minces | 111 |
| 4 | Amplitude de w_1 et de w_2 | 113 |
| 5 | Test numérique de g_Z | 113 |
| II | Sensibilité de notre expression approchée à l'épaisseur du disque | 113 |
| III | Une forme fermée pour le champ au premier ordre | 117 |
| IV | Conclusion | 118 |

I Correction au 1er ordre

Il n'existe pas à notre connaissance d'expression fermée pour l'intégrale de la fonction $B(R, Z; a, z)$ sur le rayon a . Pour estimer cette intégrale par des moyens analytiques, la fonction $k\mathbf{K}(k)$ doit être remplacée par un développement quelconque, équivalent. Pour cela, il faut utiliser les développements au premier ordre (e.g Gradshteyn and Ryzhik (1965)) donnés par l'équation 3.19 lorsque $k \rightarrow 1$ et par l'équation 4.42 du chapitre 4, section I-5. Toutefois, à des modules intermédiaires (i.e $k \sim 0.5$), ces deux formes asymptotiques ne se rejoignent pas correctement, le problème sera donc mal traité. Les deux approximations de 5 et 7 termes données dans Abramowitz and Stegun (1970) et dans l'Annexe A, sont très précises (respectivement 10^{-5} et 10^{-8}) mais restent cette fois-ci trop imposantes pour les calculs analytiques que nous voulons effectuer ici. L'ordre 0, voire l'ordre 1, d'une correction à apporter serait déjà un résultat intéressant. Le travail que je vais présenter ici, fait l'objet d'un article récemment soumis à A&A Trova *et al.* (2013).

1 Ajustement de la fonction $k\mathbf{K}(k)$ par une fonction de 3 termes

Après plusieurs investigations, nous avons noté que la fonction $k\mathbf{K}(k) + \ln k'$, représentée en fonction de k , est très proche d'une fonction linéaire. C'est ce que montre la

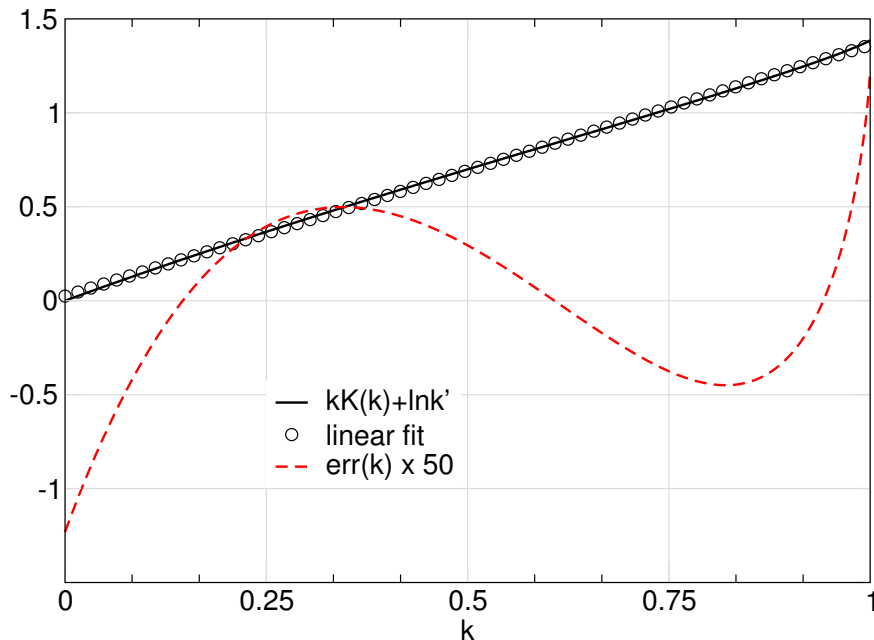


FIGURE 7.1 – Représentation de la fonction $k\mathbf{K}(k) + \ln k'$ en fonction de k et son ajustement linéaire donné par l'équation 7.1. L'erreur absolue (amplifiée d'un facteur 50) est représentée en pointillé.

figure 7.1. Nous avons construit l'ajustement de trois termes suivant :

$$k\mathbf{K}(k) = C_0 + C_1 k - \ln k' + \text{err}(k), \quad (7.1)$$

où $\text{err}(k)$ est l'erreur absolue entre la fonction $\mathbf{K}(k)$ et son ajustement. Par une méthode des moindres carrés, nous avons obtenu $C_0 = 0.0246$ et $C_1 = 1.3371$. Une autre paire (C_0, C_1) peut naturellement être utilisée : par exemple, si nous prenons $C_0 = 0$ et $C_1 = \ln 4$, l'ajustement devient exact pour $k = 0$ et $k = 1$. Cependant, même si cet ajustement est exact en deux points, il ne donne pas de résultats suffisamment satisfaisants. Sur la figure 7.1 est également tracée l'erreur faite entre la fonction $k\mathbf{K}(k)$ et son ajustement. Cette approximation a l'avantage de produire une faible erreur (de l'ordre de 1%) sur la fonction $k\mathbf{K}(k)$ et de minimiser le nombre de fonctions (3 termes) à traiter analytiquement, étant donné qu'il nous faut encore effectuer l'intégrale sur le rayon. L'avantage est aussi que l'expression de l'ajustement ne contient plus de fonctions spéciales, difficiles à traiter.

2 Approximation de g_Z

Maintenant nous pouvons exprimer la composante verticale du champ de gravité pour des systèmes verticalement homogènes en remplaçant dans l'équation 6.3 $k_{\pm}\mathbf{K}(k_{\pm})$ par

son ajustement donné par l'équation 7.1.

$$g_Z \approx -2G \int_a \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) [C_0 + C_1 k_+ - \ln k'_+ - C_0 - C_1 k_- + \ln k'_-] da, \quad (7.2)$$

$$\approx -2G \int_a \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) \left[C_1 (k_+ - k_-) - \ln \frac{k'_+}{k'_-} \right] da.$$

Nous pouvons tracer, pour le modèle 3 avec des exposants $s \in [0, 4]$ une carte de l'erreur relative entre le champ g_Z de référence (6.3) et son approximation par la relation (7.2). C'est ce qui est représenté sur la figure 7.2. Notons que notre approximation, ne produit

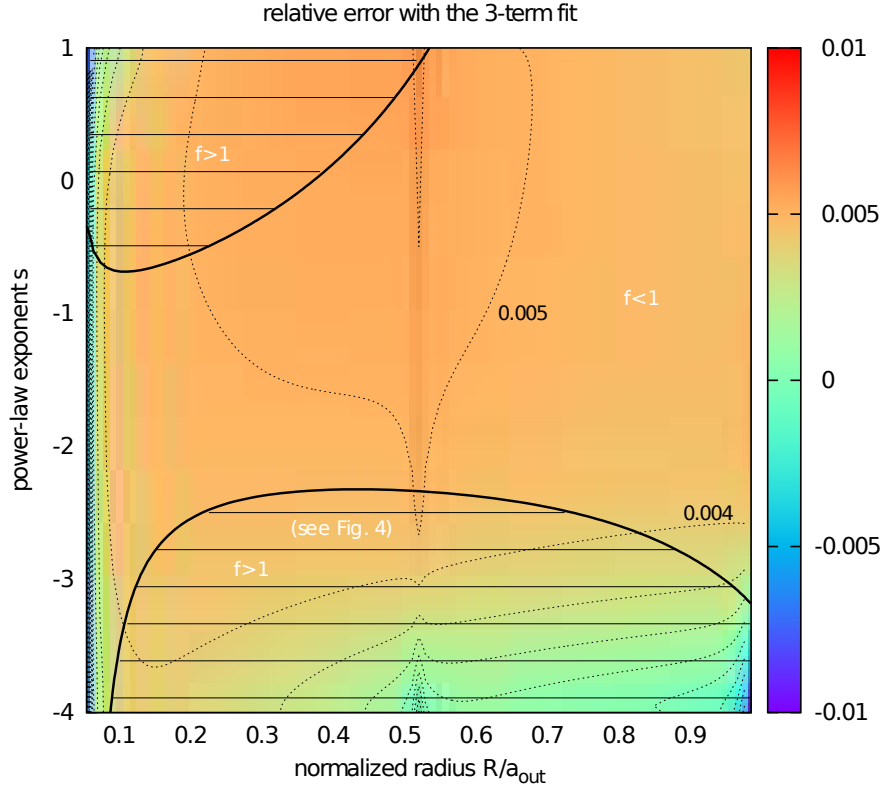


FIGURE 7.2 – Carte de l'erreur relative entre la composante verticale du champ de gravité g_Z calculée via l'ajustement de 3 termes de la fonction $k\mathbf{K}(k)$, donnée par l'équation 7.1 et la référence donnée par l'équation 6.3. Les conditions sont les mêmes que pour la figure 6.8.

qu'une erreur maximum de 1% sur le champ vertical g_Z .

3 Application aux disques géométriquement minces

Nous pouvons aller plus loin dans le calcul analytique en faisant l'approximation que le disque est géométriquement mince. Nous supposons :

$$(Z \mp h) \ll (a + R)^2, \quad (7.3)$$

ce qui correspond notamment à des disques dont le rapport d'aspect $h(a)/a \ll 1$. Nous pouvons donc donner une approximation de k_+ et de k_- (cf équation 5.18a et 5.18b du

chapitre 5, section II-1). Nous avons donc pour le premier terme de l'équation 7.2 la valeur suivante :

$$\begin{aligned} k_+ - k_- &\approx m \left[1 - \frac{\zeta_+^2}{2(a+R)^2} \right] - m \left[1 - \frac{\zeta_-^2}{2(a+R)^2} \right], \\ &\approx -\frac{m}{(a+R)^2} (\zeta_+^2 - \zeta_-^2), \\ &\approx \frac{2Zhm}{(a+R)^2}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

où m est donné par l'équation 4.5 (chapitre 4, section I-2). Pour le deuxième terme de l'équation 7.2 nous avons :

$$\begin{aligned} \ln \frac{k'_+}{k'_-} &= \frac{1}{2} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z-h)^2}{(a+R)^2 + (Z-h)^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z+h)^2}{(a+R)^2 + (Z+h)^2}, \\ &\approx \frac{1}{2} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z-h)^2}{(a+R)^2 \left[1 + \frac{(Z-h)^2}{(a+R)^2} \right]} - \frac{1}{2} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z+h)^2}{(a+R)^2 \left[1 + \frac{(Z+h)^2}{(a+R)^2} \right]}, \\ &\approx \frac{1}{2} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z-h)^2}{(a-R)^2 + (Z+h)^2} + \frac{2Zh}{(a+R)^2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Afin de calculer l'erreur faite sur cette approximation, calculons les termes d'ordre 2 de chacun des deux termes. Pour le premier terme nous avons :

$$\frac{3m}{4} \left[\frac{(Z-h)^4}{(a+R)^4} - \frac{(Z+h)^4}{(a+R)^4} \right] = -\frac{6Zhm}{(a+R)^4} (Z^2 + h^2). \quad (7.6)$$

Pour le second terme, nous avons :

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{(Z-h)^4}{(a+R)^4} - \frac{(Z+h)^4}{(a+R)^4} \right] = -\frac{4Zh}{(a+R)^4} (Z^2 + h^2). \quad (7.7)$$

L'erreur est donc de l'ordre de

$$\frac{2Zh(Z^2 + h^2)}{(a+R)^4} (-3m + 2). \quad (7.8)$$

En remplaçant les deux termes de l'équation 7.2 par leurs approximations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_1(k_+ - k_-) - \ln \frac{k'_+}{k'_-} &\approx C_1 \frac{4Zh\sqrt{aR}}{(a+R)^3} - \frac{1}{2} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z-h)^2}{(a-R)^2 + (Z+h)^2} - \frac{2Zh}{(a+R)^2}, \\ &\approx \frac{2Zh}{(a+R)^2} \left[-1 + \frac{2\sqrt{aR}}{a+R} C_1 \right] - \frac{1}{2} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z-h)^2}{(a-R)^2 + (Z+h)^2}, \\ &\approx \frac{2Zh}{(a+R)^2} [-1 + mC_1] - \frac{1}{2} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z-h)^2}{(a-R)^2 + (Z+h)^2}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Finalement, l'expression du champ de gravité vertical est :

$$\boxed{g_z \approx -2G \int_a \sqrt{\frac{a}{R}} \rho(a) \left[\frac{2Zh}{(a+R)^2} (-1 + mC_1) - \frac{1}{2} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z-h)^2}{(a-R)^2 + (Z+h)^2} \right] da.} \quad (7.10)$$

Nous pouvons découper notre intégrale en deux parties :

$$g_Z \approx -G \int_a \rho(a) w_1(a) da - G \int_a \rho(a) w_2(a) da, \quad (7.11)$$

où

$$\begin{cases} w_1(a) = -\sqrt{\frac{a}{R}} \ln \frac{(a-R)^2 + (Z-h)^2}{(a-R)^2 + (Z+h)^2}, \\ w_2(a) = -4Zh \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{1 - mC_1}{(a+R)^2}, \end{cases} \quad (7.12)$$

où w_1 contient une partie locale (matière sous le pic) et une partie non-locale (dans les "ailes"), et w_2 qui est, elle, purement non-locale.

4 Amplitude de w_1 et de w_2

La figure 7.3 représente, pour le modèle de disque 2 défini dans le tableau 6.1, $w_1(a)$ et $w_2(a)$ en fonction du rayon normalisé a/a_{out} à trois différents endroits du disque (comme à la section I-1). Nous remarquons que, que l'on soit au milieu ou sur les bords du disque, w_1 et w_2 sont quasiment du même ordre. On en conclut que w_1 seul ne permet pas de donner une bonne approximation du champ g_Z .

5 Test numérique de g_Z

Afin de comparer nos résultats, nous considérons les 3 modèles de disque présentés dans le tableau 6.1. La composante verticale g_Z du champ d'auto-gravité calculé avec la formule de référence 6.3 et avec notre approximation 7.11 ainsi que l'erreur entre les deux calculs sont représentés sur la figure 7.4. Nous remarquons que l'erreur produite par notre approximation sur le champ vertical n'excède pas 1% pour les modèles 2 et 3 (disques évasés) sur toute l'étendue du disque. Cette saturation de l'erreur est due à l'erreur faite sur l'ajustement et qui vaut approximativement $\sim h(a)/a$. Pour le modèle 1, nous voyons que le bord externe est très bien approximé alors que l'on produit une erreur de l'ordre de 10% sur le bord interne, ce qui reste toutefois correct. Ceci est dû au fait que le rapport d'aspect est de la forme $1/a$. Si nous comparons avec les erreurs produites par l'approximation de Paczynski (cf 6.7), nous voyons que l'erreur est plus faible surtout sur les bords.

II Sensibilité de notre expression approchée à l'épaisseur du disque

Il est indispensable de tester la sensibilité de notre approximation à l'épaisseur du disque. Pour cela, nous prenons le modèle de disque 1 et nous changeons le rapport d'aspect du disque, avec $h(a)/a \in \{0.5, 0.8, 1\}$. Nous comparons alors le champ de gravité vertical de référence et notre approximation donnée par la formule 7.11. Puis nous traçons l'erreur en pourcentage entre ces deux formules. Ceci est représenté sur la figure 7.5. Nous remarquons que même pour des disques relativement épais, l'erreur reste toutefois correcte. Elle atteint les 10% pour un disque de rapport d'aspect $h(a)/a = 1$. D'après les

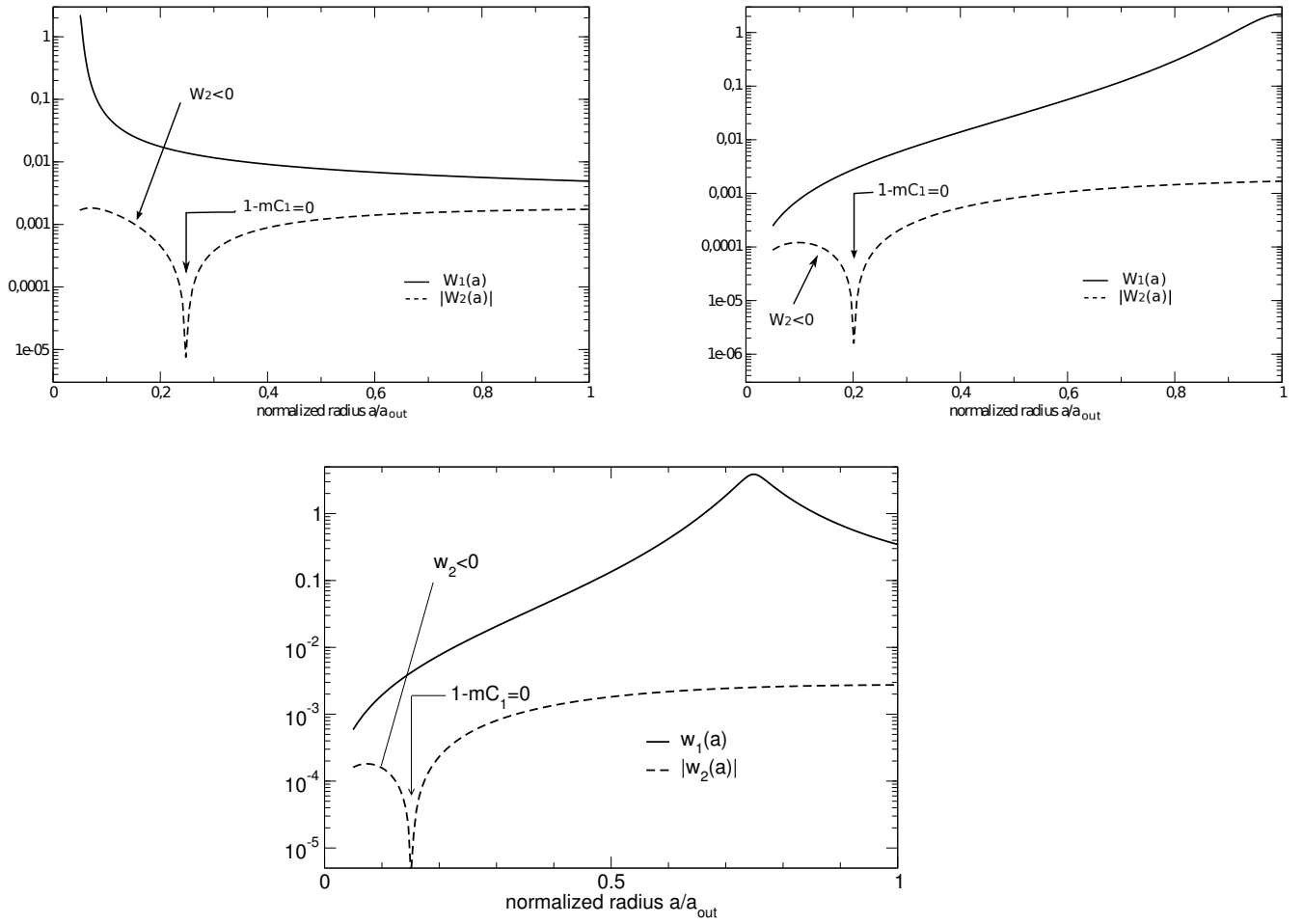


FIGURE 7.3 – w_1 et w_2 en fonction du rayon normalisé a/a_{out} pour le modèle 2 (défini dans le tableau 6.1). Le rapport d'aspect $h(a)/a = 0.1$, $Z = \frac{3}{4}h$. Ces deux fonctions sont tracées à 3 différents endroits du disque. En haut à gauche près du bord interne, en haut à droite près du bord externe et en dessous vers le milieu du disque.

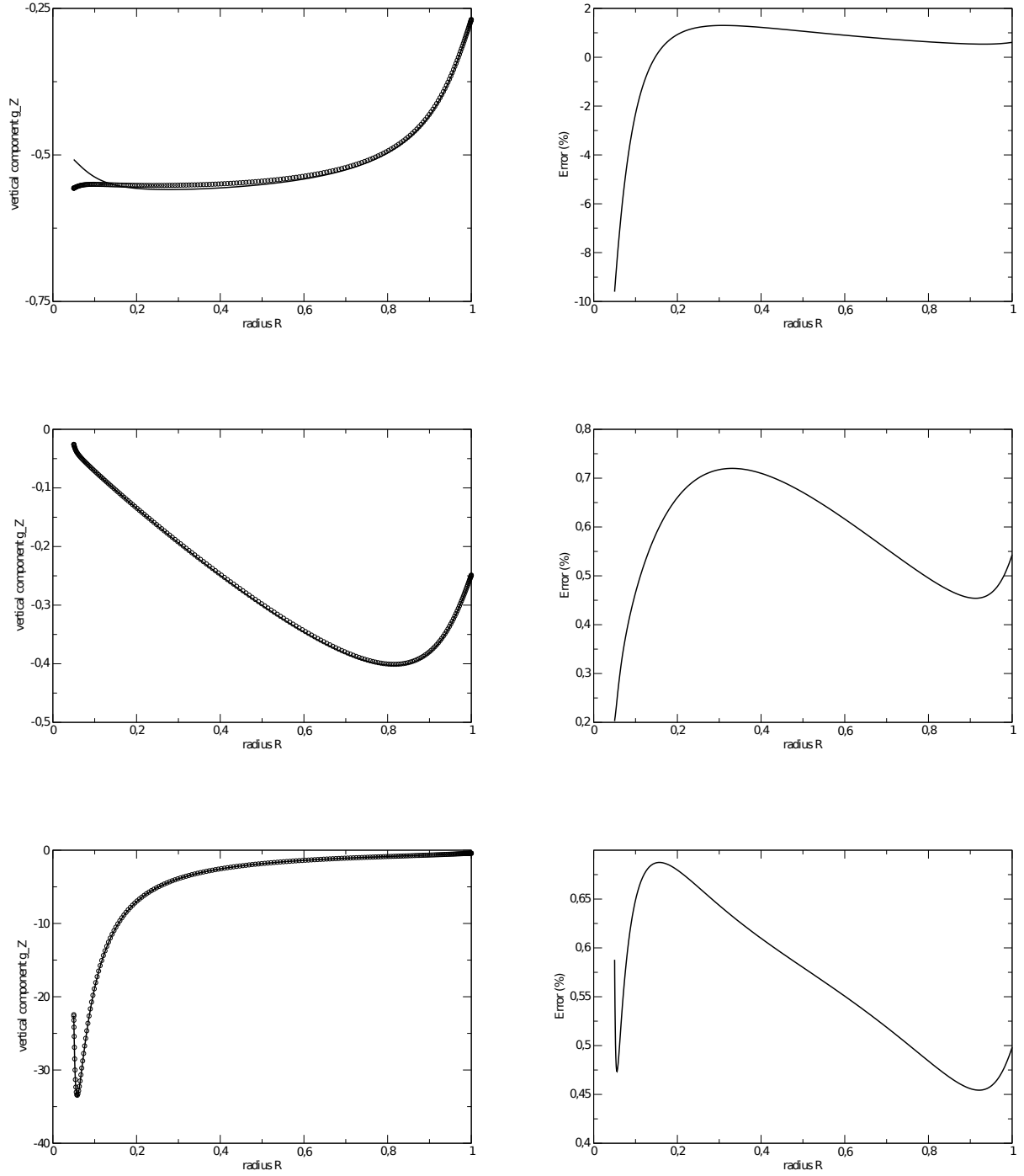


FIGURE 7.4 – A gauche : Composante verticale g_z du champ d'auto-gravité pour les 3 modèles (1,2,3 de bas en haut) présentés dans le tableau 6.1 en $Z = h/2$ et $a_{in}/a_{out} = 0.05$, en trait plein calculée avec l'expression "exacte" eq.6.3 et en cercle calculée avec notre approximation eq.7.11. A droite est représentée en pourcent l'erreur entre les deux courbes.

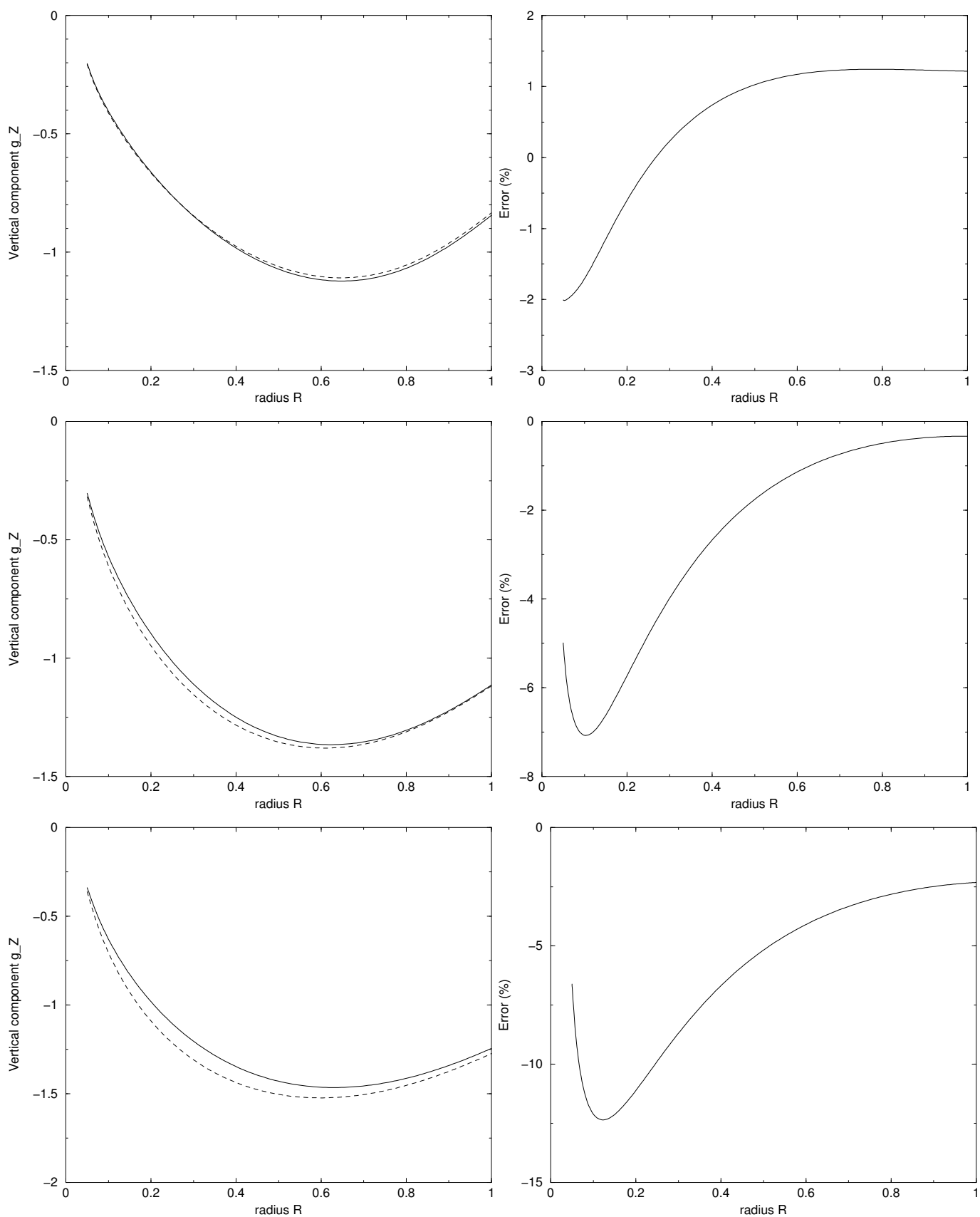


FIGURE 7.5 – A gauche : Composante verticale g_Z du champ d’auto-gravité pour le modèle 2 présenté dans le tableau 6.1 en $Z = h/2$ et $a_{in}/a_{out} = 0.05$ pour 3 rapports d’aspect différents $h(a)/a \in \{0.5, 0.8, 1\}$, en trait plein calculée avec l’expression de référence eq.6.3 et en pointillé calculée avec notre approximation eq.7.11. A droite est représentée en pourcent l’erreur entre les deux courbes.

| Rapport d'aspect $h(a)/a$ | Erreur |
|---------------------------|--------|
| 0.5 | 0.5% |
| 0.8 | 3% |
| 1 | 8% |

TABLE 7.1 – Tableau des erreurs faites sur l'approximation pour les 3 modèles de disques définis dans le tableau 6.1.

calculs de la section I-3, l'erreur en $Z = h/2$ est donc environ de l'ordre de $\frac{5}{64} \frac{h^4}{a^4}$, ce qui donne pour chaque modèle de disque présenté à la figure 7.5 les valeurs données dans le tableau 7.1. Cela correspond bien aux erreurs données à la figure 7.5.

III Une forme fermée pour le champ au premier ordre

Il n'est pas facile de déduire de l'équation 7.11 une forme algébrique du champ g_Z même quand la composante locale domine. Cependant, nous pouvons faire une approximation à l'ordre 0 de notre développement en ne gardant que la partie locale. Pour des raisons de commodité, nous définissons une nouvelle variable radiale :

$$\varpi = \frac{|a - R|}{2h(R)}, \quad (7.13)$$

qui représente la distance entre le rayon du point source et le rayon du point de champ R en unité de l'épaisseur locale $2h(R)$. Le premier terme de l'équation 7.11 donne :

$$\int w_1(a) da \approx \int \ln \frac{(a - R)^2 + (Z - h)^2}{(a - R)^2 + (Z + h)^2} da, \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} &= (a - R) \ln \frac{(a - R)^2 + (Z - h)^2}{(a - R)^2 + (Z + h)^2} \\ &+ 2 \left[(Z - h) \arctan \frac{a - R}{Z - h} - (Z + h) \arctan \frac{a - R}{Z + h} \right], \quad (7.15) \\ &\approx 4h(R) \left[\varpi \ln \frac{\varpi}{\sqrt{1 + \varpi^2}} - \arctan \varpi \right], \end{aligned}$$

où nous avons supposé que l'épaisseur et la densité ne variaient pas avec le rayon et où nous avons posé $Z = h(R)$. Le champ vertical à la surface du disque peut avantageusement s'exprimer comme une correction à l'approximation de Paczynski, soit par :

$$g_Z \approx g_Z^{\text{Pacz.}} \times f_{\text{edges}}, \quad (7.16)$$

où

$$f_{\text{edges}} = f_{\text{in}} + f_{\text{out}}, \quad (7.17)$$

$$\begin{cases} \pi f_{\text{in}} &= \arctan \varpi_{\text{in}} - \varpi_{\text{in}} \ln \frac{\varpi_{\text{in}}}{\sqrt{1 + \varpi_{\text{in}}^2}}, \\ \pi f_{\text{out}} &= \arctan \varpi_{\text{out}} - \varpi_{\text{out}} \ln \frac{\varpi_{\text{out}}}{\sqrt{1 + \varpi_{\text{out}}^2}}, \end{cases} \quad (7.18)$$

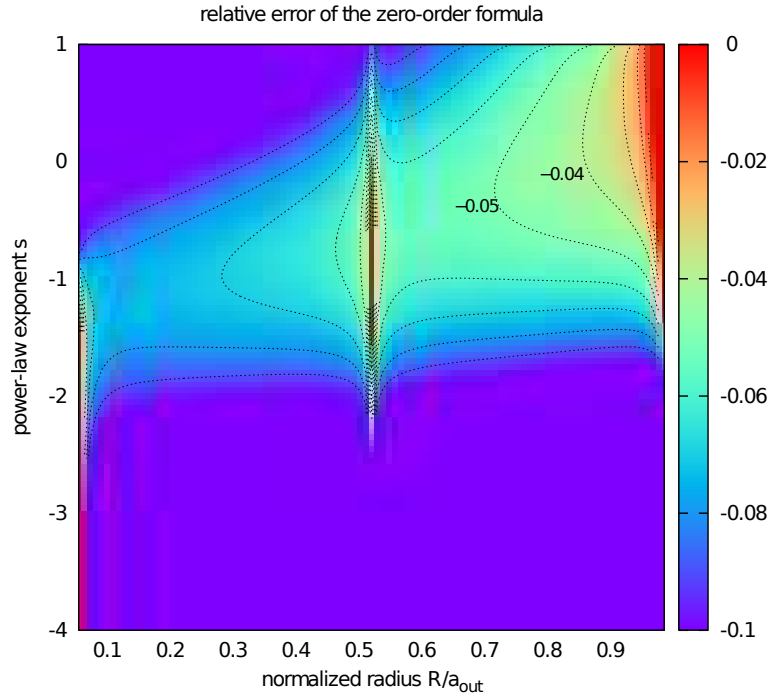


FIGURE 7.6 – Carte de la précision de l’équation 7.16 pour les mêmes paramètres que le modèle 3 (cf tableau 6.1) mais pour différents exposants de la loi de puissance de la densité radiale $s \in [-4, 1]$.

où ϖ_{in} est la valeur au bord interne a_{in} , et ϖ_{out} pour le bord externe a_{out} . La précision de cette approximation au premier ordre est représenté par la figure 7.6 (même procédé et même configuration qu’à la figure 6.5). Nous voyons que l’erreur relative n’excède pas 10% dans le domaine où la contribution locale domine. Si la masse stockée près du bord interne ne joue pas de rôle, nous pouvons poser $\pi f_{\text{in}} \approx \frac{\pi}{2}$, et nous avons donc :

$$f_{\text{edges}} \approx \left(\frac{1}{2} + \arctan \varpi_{\text{out}} - \varpi_{\text{out}} \ln \frac{\varpi_{\text{out}}}{\sqrt{1 + \varpi_{\text{out}}^2}} \right) \frac{1}{\pi}. \quad (7.19)$$

IV Conclusion

Dans cette partie nous nous sommes intéressés à la composante verticale du champ d’auto-gravité des disques. Notre principal but était d’étendre le domaine de validité de l’approximation de Paczynski et de fournir une expression analytique éventuellement une forme fermée. Nous nous sommes focalisés sur les parties externes des disques. Notre formule est valable pour des disques minces à relativement épais avec une grande variété de profils de densité radiaux et de formes. Nous avons même dans le cas des disques minces une formule totalement algébrique (à l’ordre zéro).

Inclure les effets de bords implique une diminution du champ d’auto-gravité dans les zones externes du disque, diminution que nous avons pu pour la première fois quantifier. Ce résultat aurait plusieurs conséquences intéressantes. Comme nous l’avons dit en introduction de ce chapitre, le champ d’auto-gravité influence les paramètres physiques

des disques, comme l'épaisseur du disque par exemple. Dans quel sens ? Les modèles utilisant l'approximation de Paczynski montrent une réduction de l'épaisseur sur le bord du disque. Or le fait que g_Z décroisse près des bords implique plutôt un épaississement du disque. Nous pouvons voir cet effet sur la figure 7.7, où l'on compare l'angle d'éva-

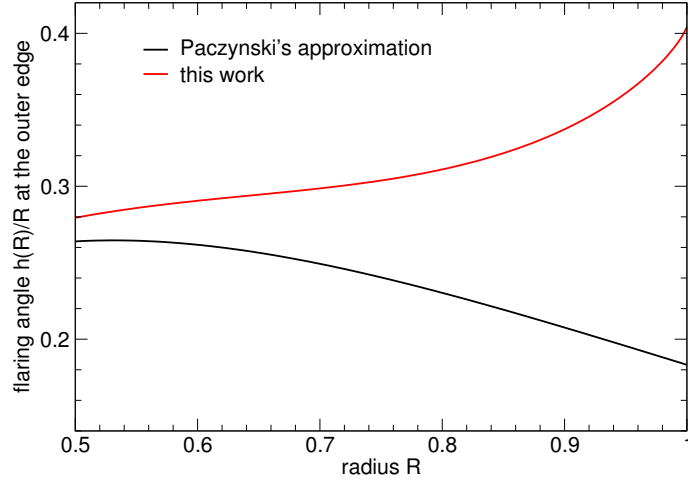


FIGURE 7.7 – Angle d'évasement $h(R)/R$ près du bord externe en fonction de R pour le modèle 1

sement local $h(R)/R$ près du bord externe en utilisant l'approximation de Paczynski et en utilisant notre nouvelle expression. Nous remarquons qu'avec la formule de Paczynski, nous retrouvons la diminution d'épaisseur. C'est un résultat connu (voir introduction). Par contre si nous prenons en compte les effets de bords, nous remarquons qu'on ne retrouve pas cette diminution mais au contraire un évasement du disque qui se poursuit, certes moins important que dans un cas képlérien. Cet épaississement devrait entraîner une baisse de la densité du disque. Ceci pose de nouvelles questions liées à toute la structure thermodynamique du disque, et même dynamique. Par exemple, la densité de surface entrant en jeu dans l'établissement du critère de stabilité gravitationnel d'après Toomre (1964), nous pouvons nous demander si celui ne serait donc pas modifié et pourrait donc influencer l'apparition d'instabilités. Afin d'étudier ces questions plus en détail, il serait intéressant d'inclure notre nouvelle expression dans des modèles de disques détaillés pour voir l'influence de ces effets de bords sur la physique des disques.

Troisième partie

Mailles cylindriques, intégrale de
contour et solution de référence

Chapitre 8

Potentiel de cellules cylindriques homogènes

Sommaire

| | | |
|-----|--|-----|
| I | Théorème de Green. Cas axi-symétrique homogène | 125 |
| II | Relaxation de l'hypothèse de symétrie axiale | 127 |
| III | Comportement des M et N's | 131 |
| IV | Potentiel d'auto-gravitation d'une cellule cylindrique | 131 |
| V | Conclusion | 137 |

Dans la "réalité", les disques ne sont pas totalement homogènes ; il existe des gradients de densité dans les trois directions. Dans les simulations numériques, toutefois, ceux-ci sont discrétisés sur des grilles numériques (cf figure 8.1 extraite de Müller *et al.* (2012)). Ces structures élémentaires sont donc des briques, bien souvent homogènes, dont la juxtaposition permet de reconstruire le système dans son ensemble et toute son inhomogénéité. Nous avons rencontré l'hypothèse d'homogénéité verticale dans les chapitres précédents et nous avons tenté d'estimer le potentiel et le champ dans leur globalité. Ici, nous allons quitter les grandes échelles pour nous focaliser sur ces cellules numériques dont nous allons imposer la géométrie. En coordonnées cartésiennes la cellule fluide tridimensionnelle est

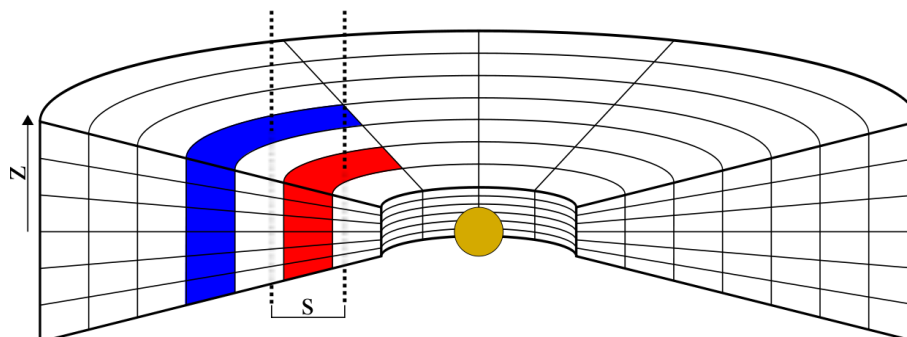


FIGURE 8.1 – Représentation en grille polaire 3D d'un disque protoplanétaire. Extrait de (Müller *et al.*, 2012).

un parallélépipède, et son potentiel est bien connu (MacMillan, 1930). Hélas, rares sont

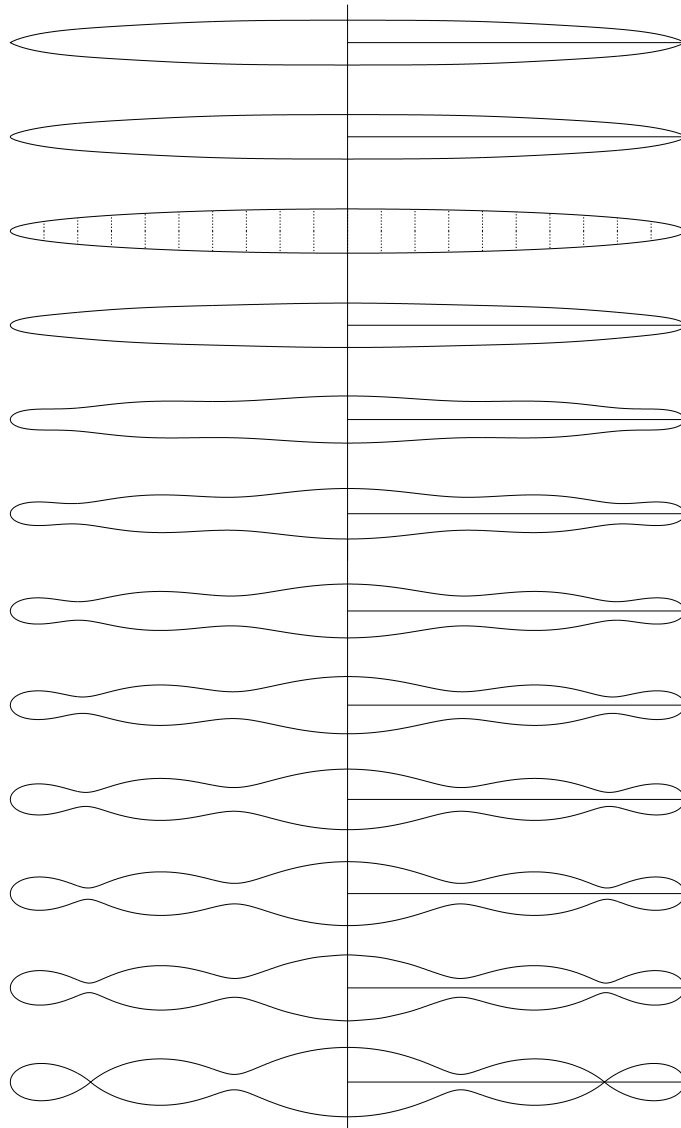


FIGURE 8.2 – Figures d'équilibre en rotation. Extrait d'Ansorg *et al.* (2003).

les cas de ce genre et il faut avoir recourt à des méthodes d'intégration numérique. Les coordonnées cylindriques et sphériques tombent malheureusement dans cette catégorie : les potentiels associés aux cellules 3D ne sont pas analytiques, à notre connaissance.

Pour les cellules axi-symétriques homogènes, il y a le travail d'Ansorg *et al.* (2003), qui rappelle que l'on peut transformer l'intégrale de surface $\iint \dots da dz$ en une intégrale de contour. Cette intégrale curviligne dont l'intégrande est totalement régulière se calcule facilement à l'aide de schémas standards et permet des précisions sur le potentiel allant jusqu'à 12 chiffres. Leur travail se place dans le contexte des figures en rotation à l'équilibre gouvernées par l'équation de Bernoulli (Hachisu, 1986). La précision de leur calcul leur a permis de trouver de nouvelles solutions d'équilibre (voir figure 8.2 pour quelques exemples), en l'occurrence de nouvelles bifurcations depuis la séquence des Maclaurin (Hachisu, 1986). Le travail que nous allons présenter dans la suite consiste, toujours sous l'hypothèse d'une masse volumique homogène, à relâcher cette hypothèse de symétrie

axiale et donc donner une expression du potentiel gravitationnel d'une cellule cylindrique. A notre connaissance, ceci n'a jamais été abordé et pourrait servir : i) à établir des solutions de références précises, et ii) pourrait servir dans les simulations numériques à calculer le potentiel d'un disque inhomogène par superposition. Nos hypothèses de départ sont donc :

- la masse volumique ρ ne dépend pas de θ' à l'intérieur du volume \mathcal{V} quelque soit a et z ;
- le volume \mathcal{V} est un domaine incurvé borné par les deux angles polaires θ'_1 et θ'_2 .

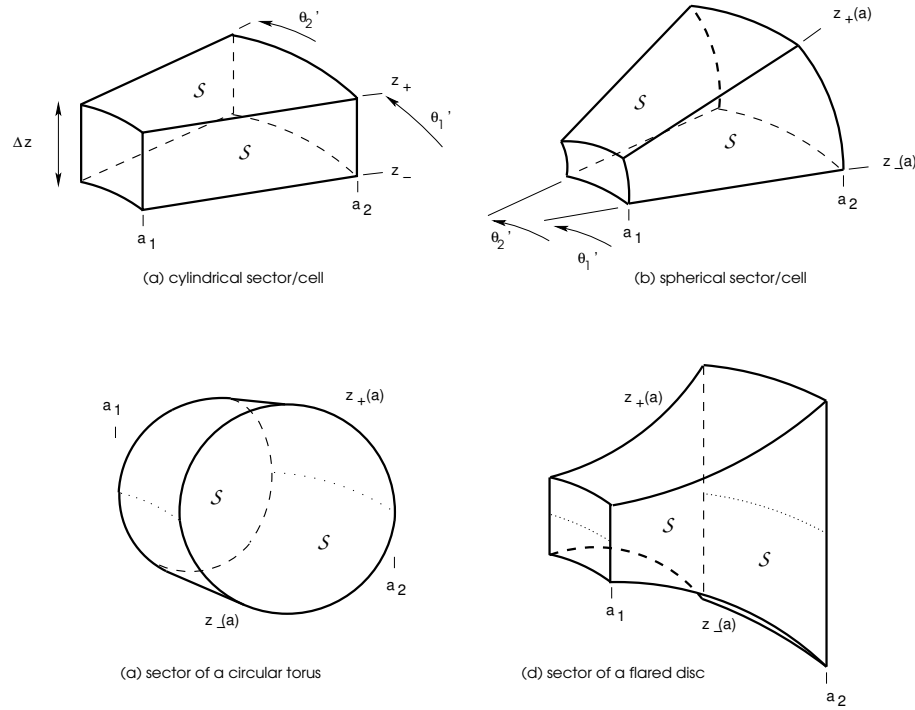


FIGURE 8.3 – Cellules à intérêt astrophysique.

Quelques exemples de tels systèmes sont donnés sur la figure 8.3. Dans ces conditions, le potentiel gravitationnel d'une maille polaire 3D s'exprime via l'équation 3.13 (chapitre 3, section I-1) avec $\Psi_{res} = 0$, étant donné que la masse volumique dans la maille cylindrique est indépendante de la longitude. Cette expression est une intégrale double sur la surface latérale du volume matériel. Cette équation peut s'appliquer à une grande variété de formes d'objets telles que des cellules sphériques ou cylindriques, tant que la densité reste indépendante de la longitude.

I Théorème de Green. Cas axi-symétrique homogène

En symétrie axiale, il est possible de calculer le potentiel $\Psi(\mathbf{r})$, avec l'équation 3.13, en faisant une double intégration numérique sur la surface de l'objet (sur a et sur z). Mais le théorème de Green permet de transformer cette double intégrale sur l'élément de surface en une intégrale simple sur le contour de la surface. Ce théorème se traduit

mathématiquement par :

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{W} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial S} \vec{W} \cdot d\vec{\ell}, \quad (8.1)$$

où \vec{W} est un vecteur, $d\vec{A} = dA \vec{n}$ est une surface élémentaire orientée vers l'extérieur et $d\vec{\ell}$, le déplacement élémentaire dans le sens anti-horaire le long de la frontière ∂S de S dans le plan perpendiculaire à la normale \vec{n} . Le potentiel d'un système axi-symétrique (cf équation de la boucle) est donné par l'intégrale de surface suivante (équation 3.13) :

$$\Psi(R, Z) = -G \int_S 2\rho(a, z) \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k) da dz. \quad (8.2)$$

Le terme $da dz$ est clairement un élément de surface méridional (plan $\theta = cst$). Sous les hypothèses d'homogénéité et de symétrie axiale, l'équation devient :

$$\Psi(R, Z) = -G \int_S 2\rho_0 \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k) da dz. \quad (8.3)$$

Le problème se simplifie considérablement, puisque le champ de densité ne fait plus partie de l'intégrande. Ainsi, la transformation de l'intégrale de surface en intégrale de contour se simplifie. Afin de pouvoir appliquer le théorème de Green, défini par l'équation 8.1, il faut trouver un vecteur \vec{W} de coordonnées cylindriques $(M, 0, N)$ tel que :

$$\frac{\partial N}{\partial a} - \frac{\partial M}{\partial z} = 2\sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k), \quad (8.4)$$

avec M et N qui ne dépendent que de a et de z . Dans ce cas, nous avons

$$\int_S 2\rho_0 \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k) da dz = \rho_0 \oint_{\partial S} M da + N dz, \quad (8.5)$$

qui est une intégrale simple. L'existence de ces deux fonctions M et N n'est pas garantie, principalement à cause de la présence de la fonction spéciale $\mathbf{K}(k)$. Toutefois, la réponse est donnée dans Ansorg *et al.* (2003) et correspond à :

$$\begin{cases} M = \zeta \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k), \\ N = \sqrt{\frac{a}{R}} k \left\{ (a + R) \mathbf{K}(k) - \frac{2R}{k^2} [\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)] \right\}. \end{cases} \quad (8.6)$$

Nous en donnons la démonstration générale dans l'Annexe D. Le potentiel s'exprime donc via la formule suivante (Ansorg *et al.*, 2003) :

$$\Psi(R, Z) = \oint \zeta \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k) da + \sqrt{\frac{a}{R}} k \left\{ (a + R) \mathbf{K}(k) - \frac{2R}{k^2} [\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)] \right\} dz, \quad (8.7)$$

$$= \int_a \left[\zeta \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k) + \sqrt{\frac{a}{R}} k \left\{ (a + R) \mathbf{K}(k) - \frac{2R}{k^2} [\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)] \right\} \frac{dz}{da} \right]_{z_-}^{z_+} da. \quad (8.8)$$

Cette expression du potentiel gravitationnel a l'avantage de n'être qu'une intégrale simple sur le rayon de l'objet. Les temps de calcul sont donc diminués car il n'y a qu'une seule intégrale à calculer. Cette formule a aussi le principal avantage d'être totalement régulière à l'extérieur et à l'intérieur de l'objet lorsque le point de champ coïncide avec le point source. En effet lorsque ce dernier point se produit, $k = 1$ et nous remarquons que la divergence logarithmique du premier terme de l'équation 8.7, due à la fonction $\mathbf{K}(k)$ s'annule grâce au facteur ζ . En ce qui concerne le second terme,

$$\sqrt{\frac{a}{R}}k \left\{ (a + R)\mathbf{K}(k) - \frac{2R}{k^2} [\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)] \right\} \frac{dz}{da} \underset{k \rightarrow 1}{\sim} 2R \{ \mathbf{K}(k) - [\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)] \} \frac{dz}{da} \Big|_{a=R}, \quad (8.9)$$

$$\underset{k \rightarrow 1}{\sim} 2R\mathbf{E}(k) \frac{dz}{da} \Big|_{a=R}. \quad (8.10)$$

La fonction $\mathbf{E}(k)$, comme nous avons pu le voir sur la figure 4.2 (chapitre 4, section I-4), est totalement régulière quel que soit le point de l'espace. L'expression donnée par Ansorg *et al.* (2003) est donc très intéressante d'un point de vue numérique car en plus de n'être constituée que d'une intégrale simple, donc des temps de calculs amoindris, son intégrande n'est plus singulière. Cependant elle n'est valable que pour des cellules axi-symétriques homogènes.

II Relaxation de l'hypothèse de symétrie axiale

Comme nous l'avons dit, dans les simulations numériques, la plupart du temps, la cellule est considérée comme homogène c'est à dire que $\rho(a, z) = \rho_0$. Nous travaillerons donc sous cette hypothèse et nous allons relâcher l'hypothèse de symétrie axiale. Dans le cas présent le potentiel gravitationnel est donné par l'équation 3.13 (chapitre 3, section I-1) avec $\rho(a, z) = \rho_0$. Afin de pouvoir appliquer le théorème de Green, il nous faut donc cette fois-ci, trouver un vecteur \vec{W} , de coordonnées $(M, 0, N)$, tel que :

$$\int_{\mathcal{S}} 2\rho_0 \sqrt{\frac{a}{R}} k (\mathbf{F}(\beta_1, k) - \mathbf{F}(\beta_2, k)) da dz = \rho_0 \oint_{\partial\mathcal{S}} M da + N dz, \quad (8.11)$$

c'est à dire,

$$\partial_a N - \partial_z M = \rho_0 \sqrt{\frac{a}{R}} k [F(\beta_1, k) - F(\beta_2, k)], \quad (8.12)$$

avec

$$\begin{cases} M = M_1 - M_2, \\ N = N_1 - N_2, \end{cases} \quad (8.13)$$

où les indices 1 et 2 font référence respectivement aux deux amplitudes β_1 et β_2 (toutes deux définies par l'équation 3.7, chapitre 3, section I-1). Nous pouvons donc pour simplifier les calculs, trouver un M_0 et un N_0 qui résolvent l'équation suivante :

$$\partial_a N_0 - \partial_z M_0 = \rho_0 \sqrt{\frac{a}{R}} k F(\beta_0, k), \quad (8.14)$$

pour un angle β_0 quelconque. Nous pouvons commencer par trouver une expression pour M_0 et N_0 qui satisfasse l'équation 8.14. Pour cela, nous allons utiliser le travail d'Ansorg

et al. (2003), qui a été décrit dans la section précédente. Par analogie avec l'équation 8.6 pour M et N dans le cas axi-symétrique, nous pouvons construire M_0 et N_0 en remplaçant les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèces par leur forme incomplète, ce qui donne :

$$\begin{cases} M_0 = \frac{\zeta}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{F}(\beta_0, k) + \frac{1}{2} f, \\ N_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} k \left\{ (a + R) \mathbf{F}(\beta_0, k) - \frac{2R}{k^2} [\mathbf{F}(\beta_0, k) - \mathbf{E}(\beta_0, k)] \right\} + \frac{1}{2} g, \end{cases} \quad (8.15)$$

où f et g sont des fonctions de a et z à déterminer (qui valent 0 dans le cas axi-symétrique). Nous utilisons cette méthode car les dérivées partielles des intégrales elliptiques incomplètes sont proches des dérivées de leur forme complète. En effet, nous avons d'après Gradshteyn and Ryzhik (1965), pour l'intégrale elliptique incomplète de première espèce :

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\beta, k)}{\partial k} = \frac{1}{k'^2} \left(\frac{\mathbf{E}(\beta, k) - k'^2 \mathbf{F}(\beta, k)}{k} - \frac{k \sin \beta \cos \beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \right), \quad (8.16)$$

et pour l'intégrale elliptique incomplète de deuxième espèce

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\beta, k)}{\partial k} = \frac{\mathbf{E}(\beta, k) - \mathbf{F}(\beta, k)}{k}. \quad (8.17)$$

La différence entre la version complète, équation D.5 (Annexe D), et la version incomplète, équation 8.16 et 8.17, est le dernier terme de l'équation 8.16. En utilisant la dérivée partielle de k en fonction de z donnée par l'équation D.4a et la dérivée de k en fonction de a , donnée par l'équation D.4b, nous pouvons donner les expressions de $\frac{\partial M_0}{\partial z}$ et $\frac{\partial N_0}{\partial a}$. Commençons par la dérivée partielle de M_0 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_0}{\partial z} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{F}(\beta_0, k) + \frac{\zeta}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{k}{\zeta} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) \mathbf{F}(\beta_0, k), \\ &+ \frac{\zeta}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} k \left[\frac{1}{k'^2} \left(\frac{\mathbf{E}(\beta_0, k) - k'^2 \mathbf{F}(\beta_0, k)}{k} - \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} \right) \right] \frac{k}{\zeta} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z}, \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} \left\{ -k \mathbf{F}(\beta_0, k) + \mathbf{E}(\beta_0, k) \left[\frac{k}{k'^2} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} \frac{k^2}{k'^2} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Calculons maintenant la dérivée partielle de N_0

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_0}{\partial a} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} \left(1 + \frac{a+R}{2a} \right) \mathbf{F}(\beta_0, k) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} \mathbf{F}(\beta_0, k) \frac{dk}{da} (a+R) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} k \left[\frac{1}{k'^2} \left(\frac{\mathbf{E}(\beta_0, k) - k'^2 \mathbf{F}(\beta_0, k)}{k} - \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} \right) \right] \frac{dk}{da} (a+R) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{\mathbf{F}(\beta_0, k)}{k} + \frac{\sqrt{aR}}{k^2} \mathbf{F}(\beta_0, k) \frac{dk}{da} \\
&\quad - \frac{\sqrt{aR}}{k} \left[\frac{1}{k'^2} \left(\frac{\mathbf{E}(\beta_0, k) - k'^2 \mathbf{F}(\beta_0, k)}{k} - \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} \right) \right] \frac{dk}{da} + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial a}, \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} \mathbf{F}(\beta_0, k) \left\{ \left(1 + \frac{a+R}{2a} \right) k - \frac{R}{a} \frac{1}{k} + \frac{2R}{k^2} \frac{dk}{da} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} \mathbf{E}(\beta_0, k) \left(\frac{a+R}{k'^2} \frac{dk}{da} - \frac{2R}{k^2 k'^2} \frac{dk}{da} + \frac{R}{a} \frac{1}{k} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} \left(\frac{2R}{k k'^2} \frac{dk}{da} - \frac{(a+R)k}{k'^2} \frac{dk}{da} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial a}. \tag{8.19}
\end{aligned}$$

A l'aide de la définition de $m = 2\sqrt{aR}/(a+R)$ et de l'équation D.4b, nous allons maintenant calculer les termes en facteur des deux intégrales elliptiques incomplètes. Commençons par le facteur de $\mathbf{F}(\beta_0, k)$.

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{a+R}{2a} \right) k - \frac{R}{a} \frac{1}{k} + \frac{2R}{k^2} \frac{dk}{da} &= k + \frac{a+R}{2a} k - \frac{R}{a} \frac{1}{k} + \frac{2R}{k^2} \left[\frac{k}{a+R} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) - \frac{k}{2a} \left(\frac{a-R}{a+R} \right) \right], \\
&= k \left(1 + \frac{a+R}{2a} - \frac{2R}{m^2(a+R)} \right) + \frac{1}{k} \left(-\frac{R}{a} + \frac{2R}{a+R} - \frac{R}{a} \frac{a-R}{a+R} \right), \\
&= k \underbrace{\left(1 + \frac{a+R}{2a} - \frac{a+R}{2a} \right)}_{=1} + \frac{1}{k} \underbrace{\frac{R}{a} \left(-1 + \frac{2a}{a+R} - \frac{a-R}{a+R} \right)}_{=0}. \tag{8.20}
\end{aligned}$$

Calculons maintenant le facteur de $\mathbf{E}(\beta_0, k)$.

$$\begin{aligned}
\frac{a+R}{k'^2} \frac{dk}{da} - \frac{2R}{k^2 k'^2} \frac{dk}{da} + \frac{R}{a} \frac{1}{k} &= \left[\frac{k}{a+R} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) - \frac{k}{2a} \left(\frac{a-R}{a+R} \right) \right] \left[a+R - \frac{2R}{k^2} + \frac{R}{a} \frac{1-k^2}{k} \right], \\
&= \frac{1}{k'^2} \left\{ k \left(1 - \frac{k^2}{m^2} - \frac{a-R}{2a} - \frac{R}{a} \right) + \frac{1}{k} \left[-\frac{2R}{a+R} \left(1 + \frac{k^2}{m^2} \right) + \frac{R}{a} \frac{a-R}{a+R} + \frac{R}{a} \right] \right\}, \\
&= \frac{1}{k'^2} \left\{ k \left(\frac{a-R}{2a} - \frac{k^2}{m^2} \right) + \frac{1}{k} \left[-\frac{2R}{a+R} \left(1 + \frac{k^2}{m^2} \right) + \frac{2R}{a+R} \right] \right\}, \\
&= \frac{1}{k'^2} \left[k \left(\frac{a-R}{2a} + \frac{a+R}{2a} + \frac{k^2}{m^2} \right) \right], \\
&= \frac{k}{k'^2} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right). \tag{8.21}
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant regrouper les termes pour calculer $\partial_a N_0 - \partial_z M_0$. Les deux facteurs de $\mathbf{E}(\beta_0, k)$ (voir équation 8.18 et équation 8.21) s'éliminant nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_a N_0 - \partial_z M_0 &= \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{F}(\beta_0, k) + \frac{1}{2} \frac{dg}{da} - \frac{1}{2} \frac{df}{dz}, \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} \left[\frac{k^2}{k'^2} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) + \frac{k}{k'^2} \frac{dk}{da} (a + R) + \frac{2R}{kk'^2} \frac{dk}{da} \right]. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Il ne nous reste donc plus qu'à exprimer le facteur du dernier terme de l'équation 8.22.

$$\begin{aligned} &\frac{k^2}{k'^2} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) + \frac{2R}{kk'^2} \frac{dk}{da} - \frac{(a + R)k}{k'^2} \frac{dk}{da} = \frac{k^2}{k'^2} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) + \frac{2R}{kk'^2} \left[\frac{k}{a + R} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) - \frac{k}{2a} \left(\frac{a - R}{a + R} \right) \right], \\ &- \frac{k}{k'^2} \left[\frac{k}{a + R} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) - \frac{k}{2a} \left(\frac{a - R}{a + R} \right) \right] (a + R), \\ &= \frac{k}{k'^2} \left[\frac{k}{2a} (a - R) + \frac{2R}{k(a + R)} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) - \frac{2R}{2ak} \frac{a - R}{a + R} \right], \\ &= \frac{k}{k'^2} \left[k \left(\frac{a - R}{2a} - \frac{2R}{m^2(a + R)} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{2R}{a + R} - \frac{2R(a - R)}{2a(a + R)} \right) \right], \\ &= \frac{k}{k'^2} \frac{R}{a} \underbrace{\left[-k + \frac{1}{k} \right]}_{\frac{k'^2}{k}}, \\ &= \frac{R}{a}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

L'équation 8.22 s'exprime donc de la façon suivante :

$$\partial_a N_0 - \partial_z M_0 = \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{F}(\beta_0, k) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{a}} \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} + \frac{1}{2} \frac{dg}{da} - \frac{1}{2} \frac{df}{dz}. \quad (8.24)$$

Afin de satisfaire l'équation 8.14, il nous faut donc annuler les trois derniers termes de l'équation 8.24.

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{a}} \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} + \frac{1}{2} \frac{dg}{da} - \frac{1}{2} \frac{df}{dz} = 0, \quad (8.25)$$

ce qui nous emmène à deux paires de solutions pour f et g qui sont :

$$\begin{cases} f = 2 \int_z \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} dz, \\ g = 0, \end{cases} \quad (8.26)$$

ou bien à :

$$\begin{cases} f = 0, \\ g = 2 \int_a \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} da. \end{cases} \quad (8.27)$$

Intéressons nous aux termes à intégrer, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{R}{a}} \frac{k \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta_0}} &= \sqrt{\frac{R}{a}} \frac{2\sqrt{aR} \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\sqrt{(a + R)^2 + (Z - z)^2} \sqrt{1 - \frac{4aR}{(a + R)^2 + (Z - z)^2} \sin^2 \beta_0}}, \\ &= \frac{2R}{\sqrt{(a + R)^2 + (Z - z)^2 + 4aR \sin^2 \beta_0}}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

L'intégrale de f par rapport à z et de g par rapport à a sont connues. Nous obtenons :

$$\begin{cases} f = -R \sin(2\beta_0) \times \operatorname{asinh} \frac{Z-z}{\sqrt{(a+R)^2 - 4aR \sin^2 \beta_0}}, \\ g = 0 \end{cases} \quad (8.29)$$

ou bien

$$\begin{cases} f = 0, \\ g = -R \sin(2\beta_0) \times \operatorname{asinh} \frac{a+R \cos(2\beta_0)}{\sqrt{(Z-z)^2 - R^2 \sin^2(2\beta_0)}}. \end{cases} \quad (8.30)$$

Ces deux paires de solutions ou toute autre combinaison linéaire, par exemple de la forme αf et $(1 - \alpha)g$ où $\alpha \in [0, 1]$ sont solutions de l'équation 8.25. Il faut noter que ces deux fonctions f et g sont totalement régulières en tout point a, z, β_0 de l'espace. Nous avons donc les solutions finales de l'équation générale 8.15.

$$\begin{cases} M_0 = \frac{\zeta}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{F}(\beta_0, k) + \frac{1}{2} \alpha f, \\ N_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{R}} k \left\{ (a + R) \mathbf{F}(\beta_0, k) - \frac{2R}{k^2} [\mathbf{F}(\beta_0, k) - \mathbf{E}(\beta_0, k)] \right\} + \frac{1}{2} (1 - \alpha) g. \end{cases} \quad (8.31)$$

III Comportement des M et N's

Comme avec leurs versions complètes, M_0 et N_0 sont totalement régulières. Afin de vérifier cela, nous allons tracer M_0 en fonction de Z pour $a = R$ et $\theta'_0 - \theta = \left\{ \frac{-\pi}{6}, 0, \frac{-\pi}{6} \right\}$ (donc $\beta_0 = \left\{ \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12} \right\}$), ce qui est représenté sur la figure 8.4, puis M_0 en fonction de R pour $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $Z = \left\{ \frac{z}{2}, z, 2z \right\}$ (c'est à dire à l'intérieur de l'objet, à la surface et à l'extérieur de l'objet), ce qui est représenté sur la figure 8.5. Pour le calcul, nous prenons $\alpha = 1$ (ce qui veut dire que l'on inclut la fonction f), $a = 1$ et $z = 1$. Nous traçons également N_0 en fonction de Z sur la figure 8.6 et en fonction de R sur la figure 8.7, avec les mêmes paramètres, mais en incluant cette fois-ci g ($\alpha = 0$). Les deux fonctions M_0 et N_0 sont donc bien totalement régulières. Le potentiel va donc pouvoir, maintenant que nous avons trouvé une expression pour M_0 et N_0 qui satisfait l'équation 8.15, s'exprimer par une seule intégrale sur le contour. L'intégrale peut donc être calculée avec des schémas numériques simples tels que par exemple la méthode des trapèzes.

IV Potentiel d'auto-gravitation d'une cellule cylindrique

Le potentiel gravitationnel d'une cellule cylindrique est défini par six paramètres : deux paramètres angulaires β_1 et β_2 qui définissent l'angle d'ouverture de la cellule, deux paramètres radiaux a_1 et a_2 qui définissent l'extension radiale de la cellule et les deux paramètres verticaux z_- et z_+ pour l'extension verticale. Cette cellule est définie sur la figure 8.3a. Toutes les fonctions définies précédemment, M_0 , N_0 , f et g dépendent de plusieurs variables, a, z, β, α et de R et Z . Nous pouvons en combinant l'équation 8.11 et l'équation 8.31, construire le potentiel de la cellule cylindrique. Il est donné par la formule suivante :

$$\Psi(\mathbf{r}) = -G \int_{\partial S} M da + N dz, \quad (8.32)$$

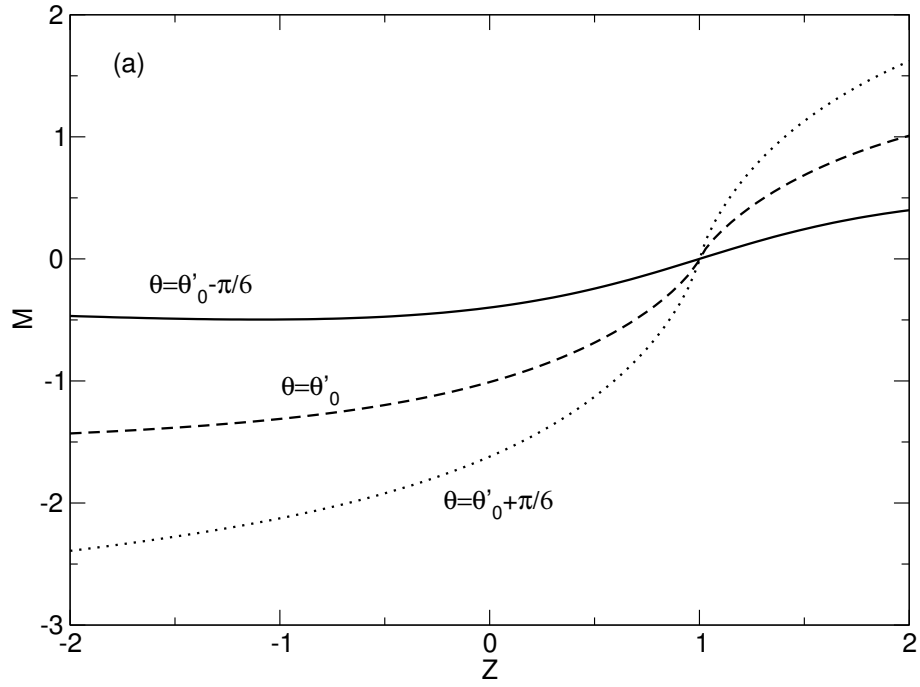


FIGURE 8.4 – Variation de M_0 en fonction de Z pour $a = R$ et $\beta_0 = \left\{\frac{5\pi}{12}, 0, \frac{7\pi}{12}\right\}$, $\alpha = 1$, donc f est inclus.

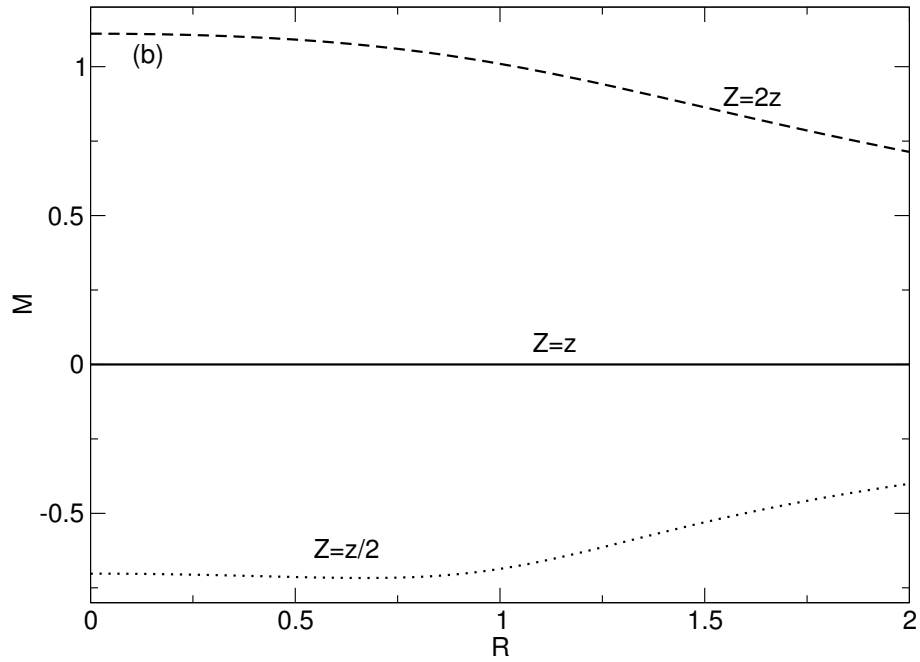


FIGURE 8.5 – Variation de M_0 en fonction de R pour $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $Z = \left\{\frac{z}{2}, z, 2z\right\}$, $\alpha = 1$, donc f est inclus.

où

$$\begin{cases} M = M_1(a, z) - M_2(a, z), \\ N = N_1(a, z) - N_2(a, z), \end{cases} \quad (8.33)$$

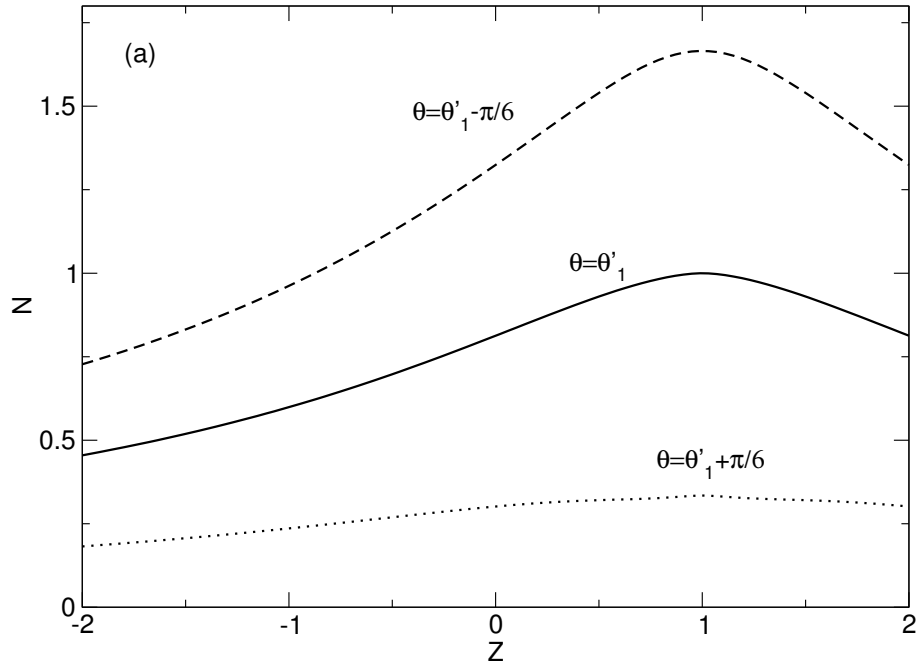


FIGURE 8.6 – Variation de N_0 en fonction de Z pour $a = R$ et $\beta_0 = \{\frac{5\pi}{12}, 0, \frac{7\pi}{12}\}$, $\alpha = 0$, donc g est inclus.

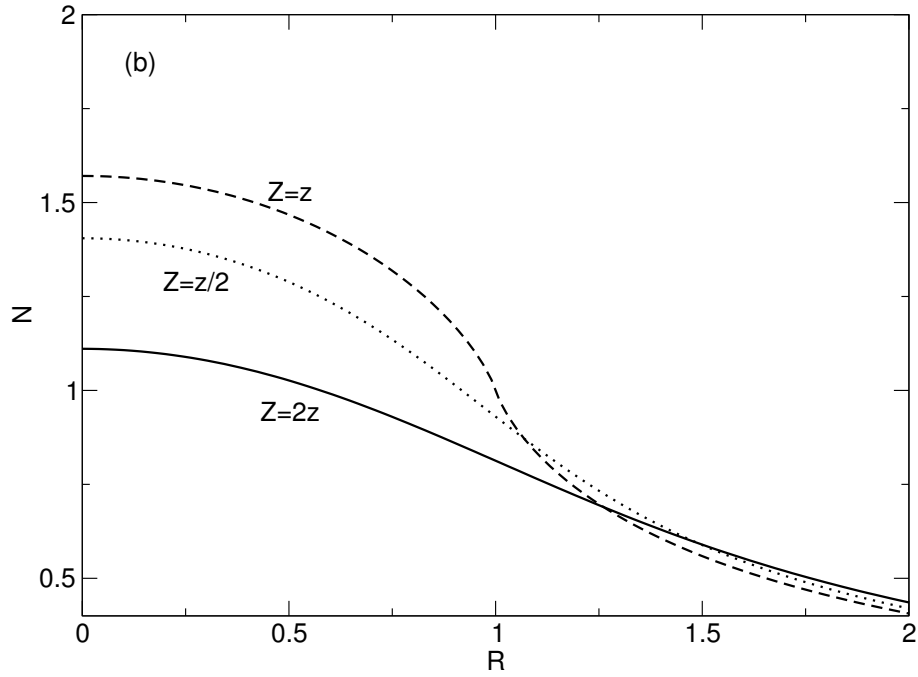


FIGURE 8.7 – Variation de N_0 en fonction de R pour $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $Z = \{\frac{z}{2}, z, 2z\}$, $\alpha = 0$, donc g est inclus.

où M_1 et M_2 sont les valeurs de M_0 pour respectivement, $\beta_0 = \beta_1$ et $\beta_0 = \beta_2$. Il en va de même pour N_1 et N_2 avec N_0 (voir 8.31). Cette formule, comme nous l'avons dit précédemment, est exacte (aucune approximation n'a été faite) et est constituée d'une

intégrale simple, avec une intégrande régulière. Cette expression n'est valide que pour des objets courbes, c'est à dire si a dépend de z , ce qui est le cas dans (Ansorg *et al.*, 2003). Dans le cas présent, le contour $\partial\mathcal{S}$ est composé de deux rectangles, le premier localisé en θ'_1 et le second en θ'_2 . Les coordonnées des quatre coins des deux rectangles sont (a_1, z_-) ,

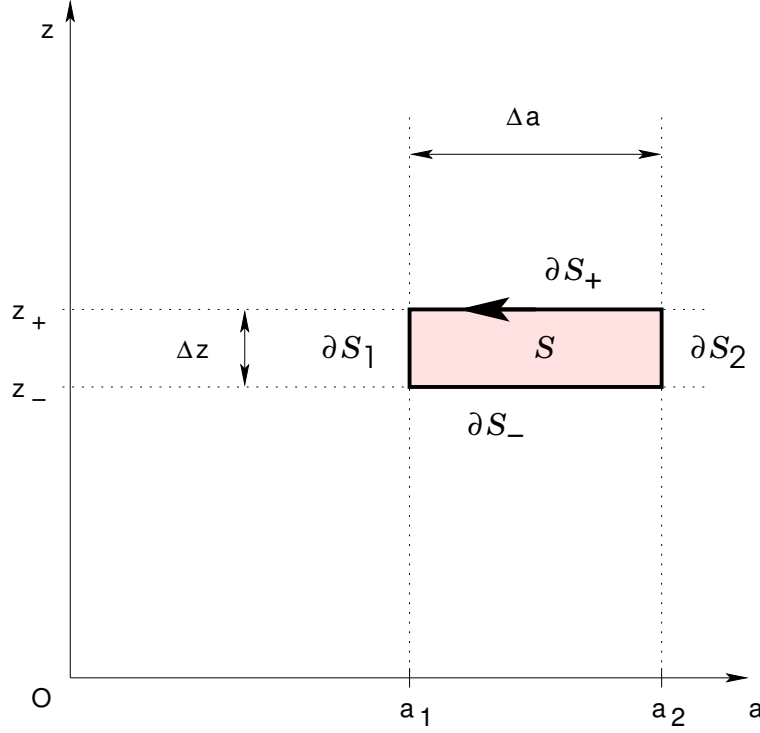


FIGURE 8.8 – Coupe transversale de section \mathcal{S} de la cellule cylindrique définie par la figure 8.3a.

(a_2, z_-) , (a_1, z_+) et (a_2, z_-) , comme nous pouvons le voir sur les figures 8.3a. Le contour est découpé en 4 contours, $\partial\mathcal{S}_-$, $\partial\mathcal{S}_+$, $\partial\mathcal{S}_1$ et $\partial\mathcal{S}_2$, définis sur la figure 8.8. Nous obtenons donc l'expression suivante :

$$\Psi(\mathbf{r}) = -G\rho_0 \left[\int_{\partial\mathcal{S}_-} \Delta M_- da + \int_{\partial\mathcal{S}_+} \Delta M_+ da + \int_{\partial\mathcal{S}_1} \Delta N_1 dz + \int_{\partial\mathcal{S}_2} \Delta N_2 dz \right]. \quad (8.34)$$

D'après la figure 8.8, sur le contour $\partial\mathcal{S}_-$, les bornes inférieures et supérieures de l'intégrale sont respectivement de a_1 et a_2 , ce qui donne

$$\Delta M_- = M_1(z_-) - M_2(z_-), \quad (8.35)$$

alors que sur le contour $\partial\mathcal{S}_+$, ce sont respectivement a_2 et a_1 , ce qui donne

$$\Delta M_+ = -M_1(z_+) + M_2(z_+). \quad (8.36)$$

Pour la deuxième intégrale sur z cette fois-ci, sur le contour $\partial\mathcal{S}_1$, les bornes inférieures et supérieures sont respectivement z_+ et z_- donc

$$\Delta N_1 = -N_1(a_1) + N_2(a_1). \quad (8.37)$$

Alors que sur le contour $\partial\mathcal{S}_2$, ce sont respectivement z_- et z_+ , nous avons donc

$$\Delta N_2 = N_1(a_2) - N_2(a_2). \quad (8.38)$$

L'expression finale est donnée par la formule suivante :

$$\Psi(\mathbf{r}) = -G\rho_0 \left[\int_{a_1}^{a_2} \Delta M(a) da + \int_{z_-}^{z_+} \Delta N(z) dz \right], \quad (8.39)$$

où

$$\begin{cases} \Delta M = M_1(z_-) - M_2(z_-) - M_1(z_+) + M_2(z_+), \\ \Delta N = N_1(a_2) - N_2(a_2) - N_1(a_1) + N_2(a_1). \end{cases} \quad (8.40)$$

Aller plus loin dans l'intégration risque d'être difficile. Les fonctions sont des compositions d'intégrales elliptiques incomplètes. Il n'existe pas à notre connaissance une forme fermée pour l'intégrale de l'équation 8.39. La figure 8.9 représente les fonctions $\Delta M(a)$ et $\Delta N(z)$

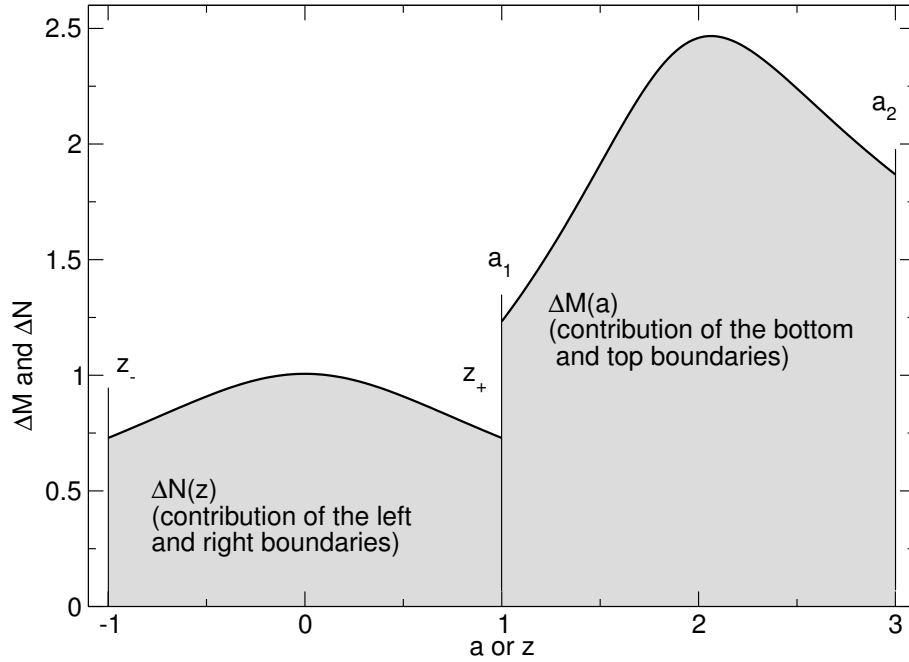


FIGURE 8.9 – $\Delta M(a)$ et $\Delta N(z)$ en fonction de a et de z , respectivement, au point $P(R, Z) = (2, 0)$ pour une cellule cylindrique avec les paramètres suivants : $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $z_- = -1$, $z_+ = 1$, $\theta'_1 = 0$ et $\theta'_2 = \pi/6$.

en fonction de a et de z , respectivement, pour une cellule cylindrique avec les paramètres suivants : $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $z_- = -1$, $z_+ = 1$, $\theta'_1 = 0$ et $\theta'_2 = \pi/6$. Le calcul est fait au centre de la cellule c'est à dire au point de coordonnées $(R = 2, Z = 0, \theta = \pi/12)$. La somme de l'aire sous les deux courbes donne la valeur du potentiel au point $P(2, 0; \pi/12)$. L'intégration numérique de $\Delta M(a)$ et $\Delta N(z)$ peut se faire avec, par exemple, la méthode des trapèzes. Nous pouvons tracer le potentiel d'auto-gravitation de la cellule cylindrique dans les trois directions (définies sur la figure 8.10) :

- la direction 1, qui correspond à la direction radiale. R varie mais Z et θ sont fixes ;

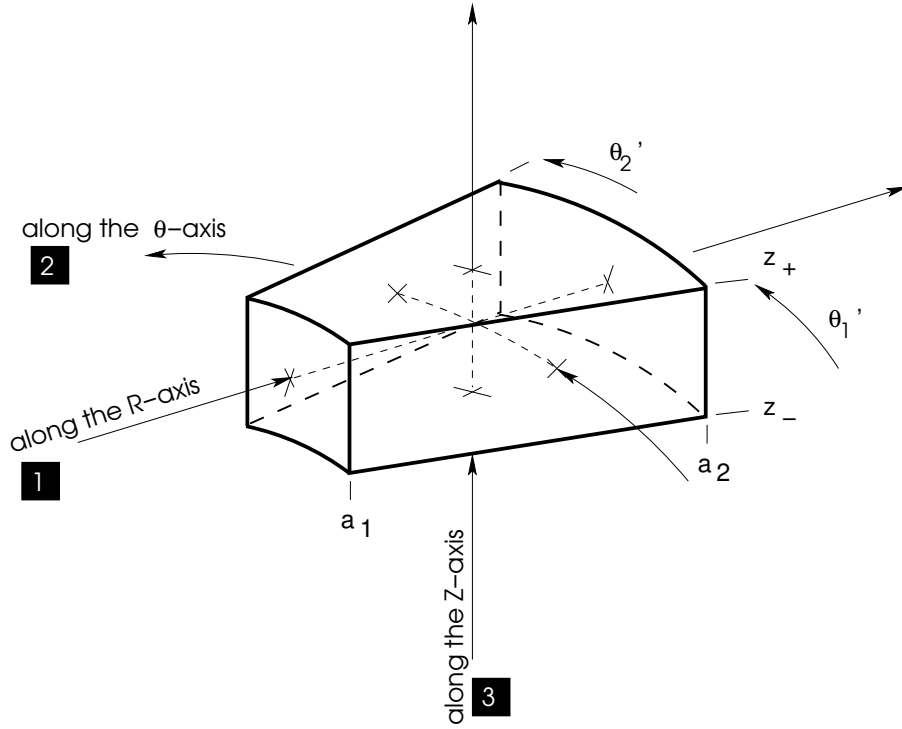


FIGURE 8.10 – La cellule cylindrique et les trois différentes directions.

- la direction 2, qui correspond à la direction azimutale. θ varie mais R et Z sont fixes ;
- la direction 3, qui correspond à la direction verticale. Z varie mais R et θ sont fixes.

C'est ce qui est représenté sur la figure 8.11. A l'aide de la formule donnée par l'équation 8.39, nous pouvons tracer des cartes (R, θ) du potentiel gravitationnel par unité de masse.

$$\mathcal{M} = a_0 \rho_0 \Delta z \Delta a \Delta \theta', \quad (8.41)$$

où $\Delta z = z_+ - z_-$ (extension verticale), $\Delta a = a_2 - a_1$ (extension radiale) $\Delta \theta' = \theta'_2 - \theta'_1$ (angle d'ouverture) et $a_0 = (a_2 + a_1)/2$ (le rayon moyen), générées par des cellules cylindriques, à trois différentes altitudes pour deux angles d'ouverture de cellules différents $\Delta \theta' = \pi/3$ et $\Delta \theta' = 4\pi/3$.

Les trois cartes à gauche sur la figure 8.12 représentent le potentiel gravitationnel généré par une cellule cylindrique dont les paramètres sont les mêmes que pour la figure 8.9 pour, respectivement, $Z = 0$ (i.e dans le plan médian), $Z = z_+$ (i.e à la surface de la cellule) et en $Z = 2z_+$ (i.e à l'extérieur de la cellule). Pour un angle d'ouverture de $\Delta \theta' = 4\pi/3$, le potentiel aux trois mêmes altitudes est représenté sur les trois cartes à droite sur la figure 8.12 respectivement. Cette expression du potentiel gravitationnel d'une cellule cylindrique est exacte, et peut-être une nouvelle solution de référence et directement injectée dans les simulations numériques de systèmes auto-gravitants ou ces derniers peuvent être discrétisés en de telles cellules. Le système étudié peut être homogène ou inhomogène. Un système à densité non uniforme peut-être recréé en assemblant des cellules cylindriques homogènes.

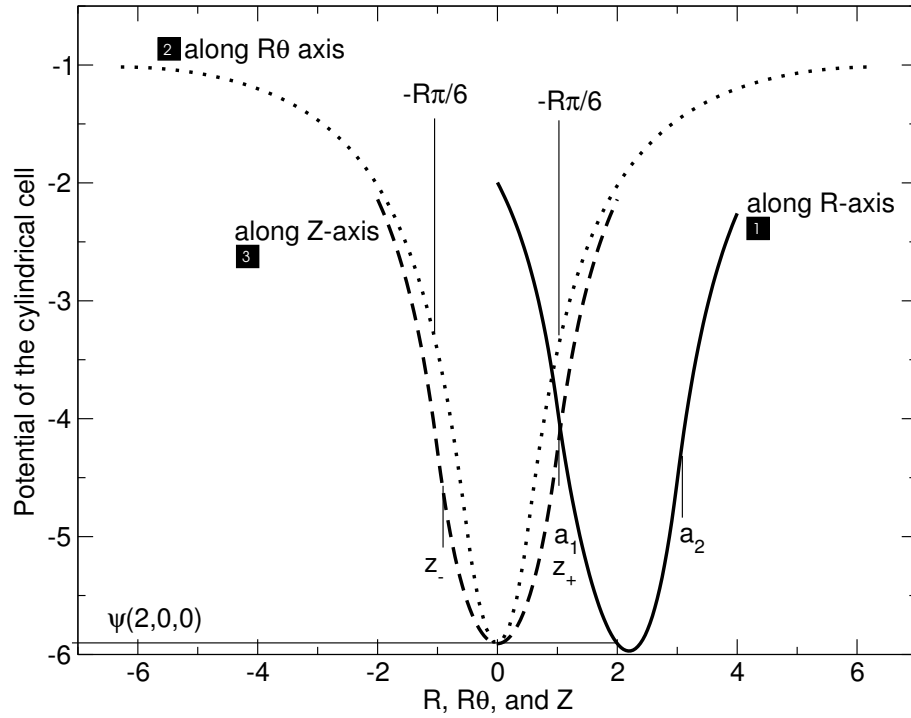


FIGURE 8.11 – représentation du potentiel gravitationnel $\Psi(R, \theta, Z)$ par unité de masse de la cellule cylindrique (mêmes paramètres que la figure 8.9), le long des trois directions définies par la figure 8.10, calculé avec l'équation 8.39 : en fonction de $R \in [0, 4]$ pour $\theta = 0$ et $Z = 0$ (direction 1, courbe trait plein), en fonction de $R\theta \in [0, 2\pi R]$ pour $R = 2$ et $Z = 0$ (direction 2, courbe en pointillée) et en fonction de $Z \in [-2, 2]$ pour $R = 2$ et $\theta = 0$ (direction 3, courbe en tiret). Le potentiel au centre de la cellule $\Psi(2, 0, 0) \approx -5.90$.

V Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu le travail d'Ansorg *et al.* (2003). Ce travail consiste, sous les hypothèses de symétrie axiale et de masse volumique ρ homogène, à transformer l'intégrale double en une intégrale simple sur le contour du système. Cette nouvelle expression a aussi l'avantage d'avoir une intégrande régulière et donc d'être calculée via de simples schémas numériques. Notre travail a été de relâcher l'hypothèse de symétrie axiale et d'appliquer leur approche pour des cellules cylindriques. Nous avons obtenu une expression nouvelle sous forme d'une seule intégrale sur le contour, composée d'une intégrande totalement régulière. Avec ce résultat, c'est un nouvel outil permettant de calculer des solutions de référence pour des géométries assez variées et à destination de simulations numériques.

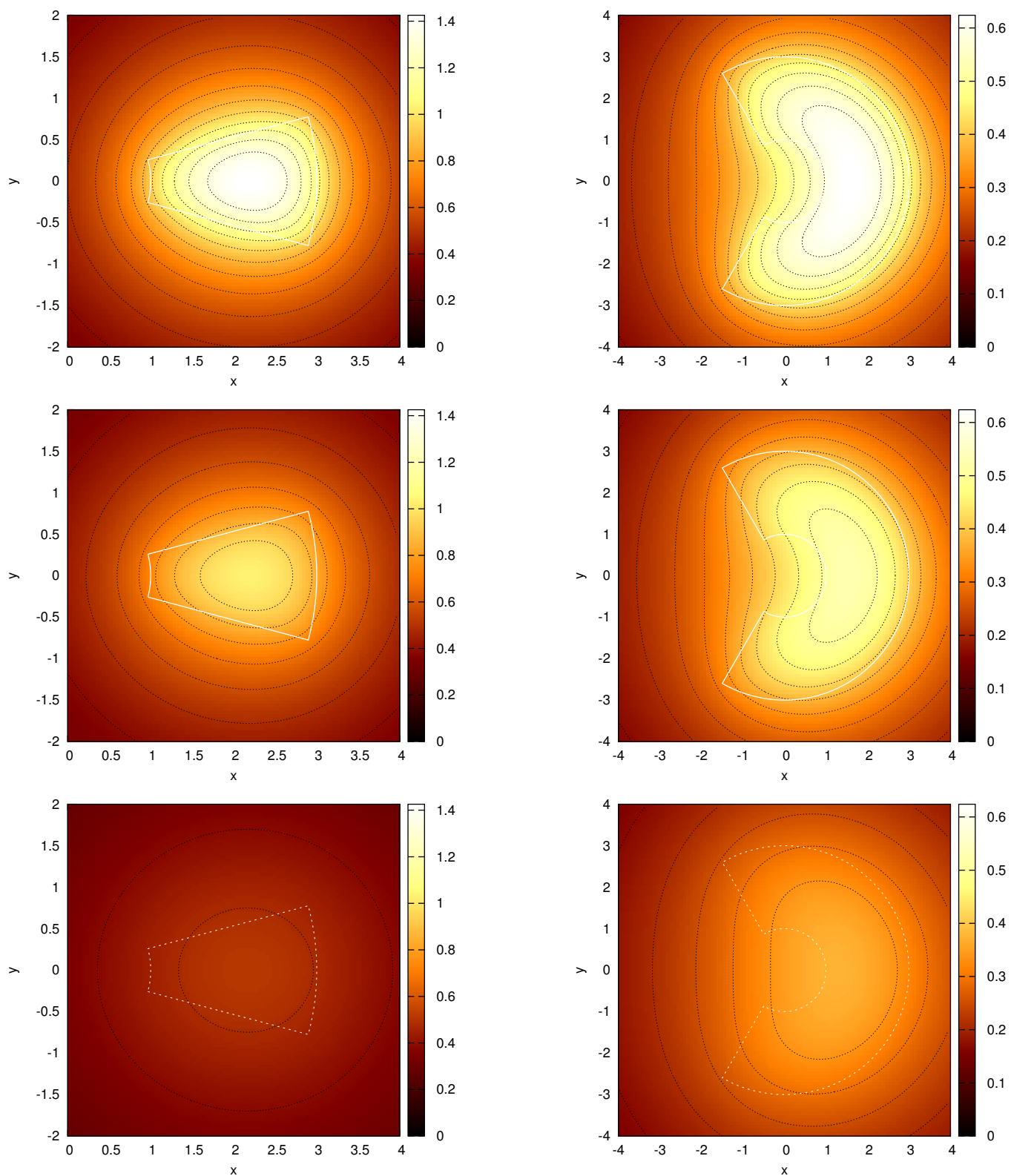


FIGURE 8.12 – À gauche : Carte du potentiel gravitationnel généré par une cellule cylindrique d'angle d'ouverture $\Delta\theta' = \pi/3$ (mêmes paramètres que la figure 8.9). $\mathcal{M} \approx 33.5$. À droite : même conditions qu'à gauche mais pour $\Delta\theta' = 4\pi/3$. De haut en bas (à gauche comme à droite), le potentiel est calculé aux altitudes $Z = 0$, $Z = z_+$ et $Z = 2z_+$.

Conclusion et Perspectives

Conclusions et Perspectives

Comme nous l'avons mentionné dans la partie introductive, la gravitation est une donnée importante dans plusieurs domaines de l'astrophysique, et particulièrement dans l'étude de l'équilibre des disques qui, rappelons le sont présents à toute les échelles. A travers les deux premiers chapitres nous avons introduit le sujet par l'exposé du développement multipolaire. A l'aide de quelques exemples, nous avons vu ce type d'approche n'est pas idéale dans les simulations d'objets s'éloignant de la sphéricité, tels que les disques. C'est dans ce contexte que nous avons cherché à produire des outils théoriques nouveaux pour des systèmes verticalement homogènes.

Régularisation du noyau de Green

En nous plaçant sous symétrie axiale, où la singularité du noyau de Green est toujours présente (de type logarithmique), nous avons construit une nouvelle expression du potentiel d'auto-gravité qui prend la forme de deux intégrales doubles à intégrande totalement régulière. Le potentiel devient maintenant accessible avec des schémas numériques simples tels que la méthode des trapèzes. Notre expression est exacte (parfaitement Newtonienne) et valable dans tout l'espace, pour tous profils de densité radiaux et pour n'importe quelle forme, en particulier dans la source. La principale restriction est l'homogénéité verticale de la densité, mais comme nous avons pu le voir dans la section III, l'erreur induite par cette hypothèse reste faible et parfaitement acceptable. Cette nouvelle formule, nous a permis par la suite de produire une approximation dans le cas de disques minces (à relativement épais), sous forme d'intégrale simple à noyau également régulier, ce qui la rend attractive d'un point de vue numérique. Ces résultats sont bien adaptés aux modèles de disques "one-zone" et pourraient également être utilisés dans des études dynamiques (calculs d'orbite). Une perspective directe, abordée dans le chapitre 5, est la construction d'une forme fermée (qui reste approchée) pour le potentiel gravitationnel dans le cas d'objets radialement peu étendus (tores et anneaux par exemple). En effet, nous avons vu que dans certains cas la fonction GAM pouvait se découper en deux fonctions linéaires, ce qui permet d'envisager une intégration sur le rayon et donc d'obtenir une forme algébrique du potentiel, c'est le cas du tore homogène de section circulaire. Ce résultat, récent peut être validé et approfondi. En effet, deux questions peuvent être posées :

- y-a-t'il d'autres formes d'objet qui permettent la même approche (forme de losange par exemple) ?
- les profils de densité $\Sigma(a)$ en loi de puissance du rayon (généralement utilisés) permettent-ils d'obtenir également une forme fermée ?

Champ de gravité vertical : équation hydrostatique et effets de bords

Sous les mêmes hypothèses, nous avons étudié la composante g_z du champ d'auto-gravité des disques. Près des bords, qui sont les régions d'où la plupart des observations proviennent, l'approximation de Paczynski généralement utilisée, ne donne pas une très bonne approximation du champ vertical du gravité. On s'attend donc à ce que l'équilibre hydrostatique ne soit pas bien pris en compte. Cette approximation ne tient compte aussi que de l'effet local du champ et ne suffit pas à expliquer le décroissement de g_z sur les bords. La formule que nous avons développée, sous forme d'une intégrale simple, est valable aux bords du disque. L'erreur faite sur la valeur exacte du champ est de l'ordre du pourcent. Celle-ci pourrait permettre en incluant notre formule dans l'équilibre hydrostatique :

- de comprendre comment la structure du disque est modifiée par l'auto-gravité du disque et en particulier sa forme (évasement plus ou moins important sur le bord externe du disque).
- d'étudier la stabilité du disque, en voyant si le critère de Toomre est modifié.

Potentiel d'une cellule cylindrique

Nous avons construit une expression pour le potentiel gravitationnel d'une cellule cylindrique de densité homogène, en appliquant le théorème de Green. Cette nouvelle formule a l'avantage de n'être constituée que d'une seule intégrale dont l'intégrande est régulière quelque soit le point de l'espace considéré. Ceci est un avantage d'un point de vue numérique (méthodes des trapèzes). Ce résultat pourrait donner quelques perspectives intéressantes. En effet,

- il devient possible de pouvoir donner le potentiel gravitationnel de systèmes qui se discrétisent en cellules cylindriques homogènes. Le profil de densité inhomogène est aussi reconstruit par l'assemblage de cellules ayant chacune une densité différente.
- cette expression pourrait également permettre de déduire une valeur de la longueur de lissage λ (dont on sait qu'il ne s'agit pas d'une constante mais d'une fonction de l'espace). En effet les auteurs s'affranchissent souvent d'une intégration dans la direction verticale en modifiant le noyau de Green (ajout de λ).

Modèle de tore auto-gravitant chargé

Nous disposons au laboratoire d'outils permettant de calculer des figures d'équilibres de polytropes en rotation (Hachisu, 1986). Avec nos collègues de Prague (Dr. V. Karas), nous envisageons, dans un projet qu'il reste à définir dans le détail, de poursuivre ces développements et d'inclure notamment l'influence du champ magnétique. En effet, dans un récent papier, Slaný *et al.* (2013) ont étudié les figures d'équilibres de tores de gaz en rotation plongés dans un champ magnétique externe et soumis au potentiel d'une masse centrale. Les auteurs ont étudié 4 différents profils de densité de courant. Certaines de ces solutions ont un comportement étonnant en ayant aucune matière autour du plan équatorial. Il serait intéressant de poursuivre ce travail en prenant en compte le potentiel

d'auto-gravité du tore, qui pourrait être important dans le contexte des noyaux actifs de galaxies. Deux perspectives peuvent être développées, en incluant les résultats développés au long de ma thèse :

- dans la limite incompressible, il serait intéressant d'utiliser une formule approchée pour le potentiel d'auto-gravité d'un tore, comme par exemple la méthode des triangles (développée dans le chapitre 5). L'idée est de résoudre, à nouveau, les équations de Slaný *et al.* (2013) mais en combinant le potentiel généré par le trou noir central avec le potentiel d'auto-gravité du tore. Il faut cependant noter que, dans ce cas, les frontières du tore n'étant pas connues, il est nécessaire de mettre en place un schéma itératif pour obtenir la forme finale (Hachisu, 1986). Ceci permettrait de montrer, au premier ordre, comment l'auto-gravité modifie l'équilibre du tore.
- Nous pourrions adapter et utiliser un code numérique développé par le groupe de Bordeaux. Ce code résout les équations de Bernoulli pour un polytrophe auto-gravitant. Il est basé sur la méthode SCF (Hachisu, 1986). Dans le cas $\rho = cste$ (limite incompressible), l'intégrale double qui donne le potentiel peut être convertie en une intégrale simple en utilisant le théorème de Green (Ansorg *et al.*, 2003) (le potentiel d'auto-gravité dépend seulement de l'équation de la surface du tore). Dans le cas compressible, le problème du potentiel reste bi-dimensionnel et un schéma itératif est également nécessaire.

Bibliographie

- M. A. ABRAMOWICZ, A. CURIR, A. SCHWARZENBERG-CZERNY, and R. E. WILSON. Self-gravity and the global structure of accretion discs. *MNRAS*, 208 :279–291, May 1984.
- M. ABRAMOWITZ and I. A. STEGUN. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. 1970.
- M. ANSORG, A. KLEINWÄCHTER, and R. MEINEL. Uniformly rotating axisymmetric fluid configurations bifurcating from highly flattened Maclaurin spheroids. *MNRAS*, 339 :515–523, February 2003.
- E. Y. BANNIKOVA, V. G. VAKULIK, and V. M. SHULGA. Gravitational potential of a homogeneous circular torus : a new approach. *MNRAS*, 411 :557–564, February 2011.
- K. R. BELL, P. M. CASSEN, H. H. KLAHR, and T. HENNING. The Structure and Appearance of Protostellar Accretion Disks : Limits on Disk Flaring. *ApJ*, 486 :372, September 1997.
- J. BINNEY and S. TREMAINE. *Galactic Dynamics*. Princeton series in astrophysics. Princeton University Press, 1987.
- J. BINNEY and S. TREMAINE. *Galactic dynamics*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987, 747 p., 1987.
- S. CHANDRASEKHAR. *Ellipsoidal figures of equilibrium*. 1973.
- H. S. COHL and J. E. TOHLINE. A Compact Cylindrical Green’s Function Expansion for the Solution of Potential Problems. *ApJ*, 527 :86–101, December 1999.
- S. COLLIN-SOUFFRIN and A. M. DUMONT. Line and continuum emission from the outer regions of accretion discs in active galactic nuclei. II - Radial structure of the disc. *A&A.*, 229 :292–328, March 1990.
- S. M. COUCH, C. GRAZIANI, and N. FLOCKE. An Improved Multipole Approximation for Self-Gravity and Its Importance for Core-Collapse Supernova Simulations. *ArXiv e-prints*, July 2013.
- D. CVIJOVIĆ and J. KLINOWSKI. On the integration of the incomplete elliptic integrals. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 444 :525–532, April 1994.
- B. DUBRULLE. A turbulent closure model for thin accretion disks. *A&A.*, 266 :592–604, December 1992.

- E. DURAND. *Electrostatique. Vol. I. Les distributions.* Ed. Masson, 1953.
- I. S. GRADSHTEYN and I. M. RYZHIK. *Table of integrals, series and products.* New York : Academic Press, 1965, 4th ed., edited by Geronimus, Yu.V. (4th ed.) ; Tseytlin, M.Yu. (4th ed.), 1965.
- T. GUILLET and R. TEYSSIER. A simple multigrid scheme for solving the Poisson equation with arbitrary domain boundaries. *Journal of Computational Physics*, 230 :4756–4771, June 2011.
- I. HACHISU. A versatile method for obtaining structures of rapidly rotating stars. II - Three-dimensional self-consistent field method. *ApJS*, 62 :461–499, November 1986.
- A. M. HUGHES, D. J. WILNER, C. QI, and M. R. HOGERHEIJDE. Gas and Dust Emission at the Outer Edge of Protoplanetary Disks. *ApJ*, 678 :1119–1126, May 2008.
- J.-M. HURÉ. Solutions of the axi-symmetric Poisson equation from elliptic integrals. I. Numerical splitting methods. *A&A.*, 434 :1–15, April 2005.
- J.-M. HURÉ. A key-formula to compute the gravitational potential of inhomogeneous discs in cylindrical coordinates. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 114 :365–385, December 2012.
- J.-M. HURÉ and A. PIERENS. Accurate Numerical Potential and Field in Razor-thin, Axisymmetric Disks. *ApJ*, 624 :289–294, 2005.
- J.-M. HURÉ, A. PIERENS, and F. HERSANT. Self-gravity at the scale of the polar cell. *A&A.*, 500 :617–620, June 2009.
- J. D. JACKSON. *Classical Electrodynamics, 3rd Edition.* July 1998.
- O. D. KELLOGG. *Foundations of Potential Theory.* New-York : Frederick Ungar Publishing Company, 1929.
- A.M. LEGENDRE. *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes : (1826) Méthodes pour construire les tables elliptiques. Recueil des tables elliptiques. Traité des intégrales eulériennes. Appendice.* Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes : avec des tables pour en faciliter le calcul numérique. Imprimerie de Huzard-Courcier, 1826.
- W.D. MACMILLAN. *The theory of the potential.* Number vol. 2 in Theoretical mechanics. McGraw-Hill Book Company, inc., 1930.
- T. MATSUMOTO and T. HANAWA. A Fast Algorithm for Solving the Poisson Equation on a Nested Grid. *ApJ*, 583 :296–307, January 2003.
- M. MAYER and W. J. DUSCHL. Stationary Population III accretion discs. *MNRAS*, 356 :1–11, January 2005.
- S. MINESHIGE and M. UMEMURA. Self-similar Collapse of a Self-gravitating Viscous Disk. *ApJ*, 480 :167–+, May 1997.

- P.M.C. MORSE and H. FESHBACH. *Methods of theoretical physics*. Number vol. 2 in International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, 1953.
- P.M. MORSE and H. FESHBACH. *Methods of Theoretical Physics Bind 1*. McGraw-Hill, 1953.
- T. W. A. MÜLLER, W. KLEY, and F. MERU. Treating gravity in thin disk simulations. *ArXiv e-prints*, March 2012.
- I. NEWTON. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687.
- B. PACZYNSKI. A model of selfgravitating accretion disk. *Acta Astron.*, 28 :91–109, 1978.
- B. PACZYNSKI. A model of selfgravitating accretion disk with a hot corona. *Acta Astron.*, 28 :241–251, 1978.
- PIERENS. *L’auto-gravité dans les disques astrophysiques : méthodes et applications*. thèse, Université Pierre et Marie Curie Paris VI, 2005.
- S.D. POISSON. *Mémoire sur l’attraction d’un ellipsoïde homogène*. L’Académie des sciences, 1833.
- J. E. PRINGLE. Accretion discs in astrophysics. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 19 :137–162, 1981.
- N. I. SHAKURA and R. A. SUNYAEV. Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A.*, 24 :337–355, 1973.
- S. N. SHORE and R. L. WHITE. Self-gravitating accretion disk models for active galactic nuclei - Self-consistent alpha-models for the broad emission-line region. *ApJ*, 256 :390–396, May 1982.
- P. SLANÝ, J. KOVÁŘ, Z. STUHLÍK, and V. KARAS. Charged Tori in Spherical Gravitational and Dipolar Magnetic Fields. *ApJS*, 205 :3, March 2013.
- J. M. STONE and M. L. NORMAN. ZEUS-2D : A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I - The hydrodynamic algorithms and tests. *ApJS*, 80 :753–790, June 1992.
- A. TOOMRE. On the gravitational stability of a disk of stars. *ApJ*, 139 :1217–1238, May 1964.
- E. TRESACO, A. ELIPE, and A. RIAGUAS. Dynamics of a particle under the gravitational potential of a massive annulus : properties and equilibrium description. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, pages 95–+, September 2011.
- A. TROVA, F. HERSANT, and J. M. HURÉ. *MNRAS*, *submitted*, June 2013.
- A. TROVA, J.-M. HURÉ, and F. HERSANT. The potential of discs from a ‘mean Green function’. *MNRAS*, 424 :2635–2645, August 2012.

- L. ŠUBR and V. KARAS. A manifestation of the Kozai mechanism in the galactic nuclei. In S. HLEDÍK & Z. STUHLÍK, editor, *RAGtime 6/7 : Workshops on black holes and neutron stars*, pages 281–293, December 2005.
- J. V. VILLUMSEN. Evolution of the velocity distribution in galactic disks. *ApJ*, 290 :75–85, March 1985.
- G.N. WATSON. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1995.
- L. YANG and X. LIU. Radial self-gravity of accretion disc around supermassive black holes. *Ap&SS*, 172 :293–304, October 1990.

Annexes

Annexe A

Intégrales elliptiques complètes et incomplètes

Sommaire

| | | |
|------------|--|------------|
| I | Définitions des fonctions | 151 |
| II | Règles d'utilisation | 152 |
| III | Dérivées des intégrales complètes | 153 |
| IV | Développements en série | 153 |
| 1 | Intégrales elliptiques incomplètes | 153 |
| 2 | Intégrales elliptiques complètes | 154 |
| V | Approximations polynomiales | 154 |

Dans cette annexe, nous définissons les différentes fonctions spéciales, appelées intégrales elliptiques, utilisées tout au long du manuscrit ainsi que les relations entre leurs dérivées.

I Définitions des fonctions

Une intégrale elliptique est toute fonction qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\int \frac{P dx}{R}, \quad (\text{A.1})$$

avec P qui est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) et R un polynôme en x du 4ème degré (Legendre, 1826). Chacune de ces intégrales peut se réduire à une combinaison de fonctions élémentaires et d'une des trois intégrales suivantes (e.g Gradshteyn and Ryzhik (1965)) :

– Intégrale elliptique incomplète de première espèce :

$$\mathbf{F}(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \quad (\text{A.2})$$

- Intégrale elliptique incomplète de deuxième espèce :

$$E(x, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \quad (\text{A.3})$$

- Intégrale elliptique incomplète de troisième espèce :

$$\Pi(x, m, k) = \int_0^x \frac{dx}{(1 - mx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \quad (\text{A.4})$$

où $k \in [0, 1]$ est appelé module de l'intégrale, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ son module complémentaire et $m \in [0, 1]$ le paramètre. En faisant le changement de variable suivant $x = \sin \alpha$, ces dernières deviennent les fonctions suivantes (e.g Gradshteyn and Ryzhik (1965)) :

$$\mathbf{F}(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad (\text{A.5})$$

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad (\text{A.6})$$

$$\Pi(\phi, m, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 - m \sin^2 \alpha)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (\text{A.7})$$

Ces intégrales existent également en version complète. Elle sont définies par :

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{F}\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{E}(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{\Pi}(m, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, m, k\right), \quad (\text{A.10})$$

II Règles d'utilisation

Donnons également quelques règles à suivre pour l'utilisation de ces intégrales elliptiques (Gradshteyn and Ryzhik, 1965) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}(\beta, k) = -\mathbf{F}(-\beta, k), \quad \text{si } \beta < 0, \\ \mathbf{F}(\beta, k) = n\mathbf{K}(k) + \mathbf{F}\left(|\beta| - n\frac{\pi}{2}, k\right), \quad \text{si } |\beta| - n\frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } n \text{ pair}, \\ \mathbf{F}(\beta, k) = n\mathbf{K}(k) - \mathbf{F}\left(n\frac{\pi}{2} - |\beta|, k\right), \quad \text{si } n\frac{\pi}{2} - |\beta| \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } n \text{ impair}, \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\beta, k) = -E(-\beta, k), \quad \text{si } \beta < 0, \\ E(\beta, k) = n\mathbf{E}(k) + E\left(|\beta| - n\frac{\pi}{2}, k\right), \quad \text{si } |\beta| - n\frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } n \text{ pair}, \\ E(\beta, k) = n\mathbf{E}(k) - E\left(n\frac{\pi}{2} - |\beta|, k\right), \quad \text{si } n\frac{\pi}{2} - |\beta| \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } n \text{ impair}. \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

III Dérivées des intégrales complètes

Puis finalement donnons l'expression de leurs dérivées par rapport k :

$$\frac{d\mathbf{K}(k)}{dk} = \frac{\mathbf{E}(k)}{kk'^2} - \frac{\mathbf{K}(k)}{k}, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{d\mathbf{E}(k)}{dk} = \frac{\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k)}{k}, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d\Pi(m, k)}{dk} = \frac{k}{k^2 - m^2} \left[\Pi(m^2, k) - \frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} \right]. \quad (\text{A.15})$$

IV Développement en série

1 Intégrales elliptiques incomplètes

Pour de petites valeurs de k et β , nous pouvons utiliser :

$$\mathbf{F}(\beta, k) = \frac{2}{\pi} \mathbf{K} \beta - \sin \beta \cos \beta \left(a_0 + \frac{2}{3} a_1 \sin^2 \beta + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a_2 \sin^4 \beta + \dots \right), \quad (\text{A.16})$$

où

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \mathbf{K} - 1 \quad \text{et} \quad a_n = a_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n}. \quad (\text{A.17})$$

$$E(\beta, k) = \frac{2}{\pi} E \beta - \sin \beta \cos \beta \left(b_0 + \frac{2}{3} b_1 \sin^2 \beta + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} b_2 \sin^4 \beta + \dots \right), \quad (\text{A.18})$$

où

$$b_0 = 1 - \frac{2}{\pi} E \quad \text{et} \quad b_n = b_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}. \quad (\text{A.19})$$

Pour des valeurs de $k \sim 1$, nous pouvons utiliser :

$$\mathbf{F}(\beta, k) = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}' \ln \left[\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] - \frac{\tan \beta}{\cos \beta} \left(a'_0 - \frac{2}{3} a'_1 \tan^2 \beta + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a'_2 \tan^4 \beta - \dots \right), \quad (\text{A.20})$$

où

$$a'_0 = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}' - 1 \quad \text{et} \quad a'_n = a'_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k'^{2n}. \quad (\text{A.21})$$

$$E(\beta, k) = \frac{2}{\pi} (\mathbf{K}' - E') \ln \left[\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \frac{\tan \beta}{\cos \beta} \left(b'_0 - \frac{2}{3} b'_1 \tan^2 \beta + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a'_2 \tan^4 \beta - \dots \right) + \frac{1}{\sin \beta} \left[1 - \cos \beta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} \right], \quad (\text{A.22})$$

où

$$b'_0 = \frac{2}{\pi} (\mathbf{K}' - E') \quad \text{et} \quad b'_n = b'_{n-1} - \left[\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1} (n-1)!} \right]^2 \frac{2n-1}{2n} k'^{2n}, \quad (\text{A.23})$$

avec $\mathbf{K}' = \mathbf{K}(k')$, $E' = E(k')$.

2 Intégrales elliptiques complètes

Pour de petites valeurs de k , nous pouvons utiliser :

$$\mathbf{K} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) k^4 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 k^{2n} + \dots \right\}, \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{E} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \dots - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right\}. \quad (\text{A.25})$$

Pour des valeurs de $k \sim 1$, nous pouvons utiliser :

$$\mathbf{K} = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} \right] k'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) k'^4 + \dots, \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{E} = 1 + \frac{1}{2} \left[\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} \right] k'^2 + \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) k'^4 + \dots \quad (\text{A.27})$$

V Approximations polynomiales

Il existe des approximations polynomiales des intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèces (e.g. Abramowitz and Stegun, 1970) :

$$\mathbf{K}(k) = [c_0 + c_1 k_1 + c_2 k_1^2] + [d_0 + d_1 k_1 + d_2 k_1^2] \ln \frac{1}{k_1} + \varsigma(k), \quad (\text{A.28})$$

$$\text{où } \begin{cases} c_0 = 1.3862944 & d_0 = 0.5 \\ c_1 = 0.1119723 & d_1 = 0.1213478 \\ c_2 = 0.0725296 & d_2 = 0.0288729 \end{cases}$$

et $|\varsigma| < 3 \times 10^{-5}$.

$$\mathbf{K}(k) = [c_0 + c_1 k_1 + c_2 k_1^2 + c_3 k_1^3 + c_4 k_1^4] + [d_0 + d_1 k_1 + d_2 k_1^2 + d_3 k_1^3 + d_4 k_1^4] \ln \frac{1}{k_1} + \varsigma(k), \quad (\text{A.29})$$

$$\text{où } \begin{cases} c_0 = 1.38629436122 & d_0 = 0.5 \\ c_1 = 0.09666344259 & d_1 = 0.12498593597 \\ c_2 = 0.03590092383 & d_2 = 0.06880248576 \\ c_3 = 0.03742563713 & d_3 = 0.03328355346 \\ c_4 = 0.01451196212 & d_4 = 0.00441787012 \end{cases}$$

et $|\varsigma| < 2 \times 10^{-8}$.

$$\mathbf{E}(k) = [1 + c_1 k_1 + c_2 k_1^2] + [d_1 k_1 + d_2 k_1^2] \ln \frac{1}{k_1} + \varsigma(k), \quad (\text{A.30})$$

$$\text{où } \begin{cases} c_1 = 0.4630151 & d_1 = 0.2452727 \\ c_2 = 0.1077812 & d_2 = 0.0412496 \end{cases}$$

et $|\varsigma| < 4 \times 10^{-5}$.

$$\mathbf{E}(k) = [1 + c_1 k_1 + c_2 k_1^2 + c_3 k_1^3 + c_4 k_1^4] + [d_1 k_1 + d_2 k_1^2 + d_3 k_1^3 + d_4 k_1^4] \ln \frac{1}{k_1} + \varsigma(k), \quad (\text{A.31})$$

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{ll} c_1 &= 0.44325141463 \\ c_2 &= 0.06260601220 \\ c_3 &= 0.04757383546 \\ c_4 &= 0.01736506451 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} d_0 &= 0.24998268310 \\ d_1 &= 0.09200180037 \\ d_2 &= 0.04069697526 \\ d_3 &= 0.03328355346 \\ d_4 &= 0.00526449639 \end{array}$$

$$\text{et } |\varsigma| < 2 \times 10^{-8}.$$

Annexe B

Polynôme de Legendre et fonctions associées

Sommaire

| | | |
|-----------|---|------------|
| I | Polynôme de Legendre | 157 |
| 1 | Équation différentielle de Legendre | 157 |
| 2 | Autres définitions | 158 |
| 3 | Quelques polynômes et leur représentation | 158 |
| 4 | Propriétés des polynômes | 158 |
| II | Fonctions associées de Legendre de première espèce | 158 |
| 1 | Équation différentielle | 158 |
| 2 | Lien entre les polynômes de Legendre et les fonctions associées | 159 |
| 3 | Quelques propriétés | 159 |

Dans cette annexe, nous donnerons les définitions, les formules ainsi que les propriétés des polynômes de Legendre et des fonctions associées de Legendre de première espèce. Ces informations sont tirées de plusieurs recueils (Gradshteyn and Ryzhik, 1965; Abramowitz and Stegun, 1970).

I Polynôme de Legendre

Les polynômes de Legendre sont les solutions de l'équation différentielle de Legendre. Voici leur définition ainsi que quelques unes de leurs propriétés.

1 Équation différentielle de Legendre

On appelle équation différentielle de Legendre, l'équation suivante :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n + 1)y = 0, \quad (\text{B.1})$$

où n est un entier naturel. Les solutions de cette équation sont appelées polynômes de Legendre, et sont notés $P_n(x)$, n étant le degré du polynôme. On rencontre cette équation, par exemple, dans la résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques par la méthode de séparation des variables avec $x = \cos \theta$.

2 Autres définitions

- Formule de Rodrigues : Pour tout entier n , le polynôme de Legendre de degré n , $P_n(x)$ est défini comme

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (\text{B.2})$$

- Formule de récurrence : $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, pour tout entier $n > 0$,

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \quad (\text{B.3})$$

3 Quelques polynômes et leur représentation

Expression des polynômes de premier degré $n = [0, 4]$ et leur représentation.

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\ P_4(x) = \frac{3}{8} - \frac{15}{4}x^2 + \frac{35}{8}x^4. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Ces 5 premiers polynômes sont représentés en fonction de x sur la figure B.1

4 Propriétés des polynômes

- La parité des polynômes de Legendre suit la parité de leur degré n :

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (\text{B.5})$$

- Orthogonalité :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad \text{si } n \neq m, \quad (\text{B.6})$$

soit si $x = \cos \theta$,

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad \text{si } n \neq m. \quad (\text{B.7})$$

- Norme :

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{4}{2n+1}}. \quad (\text{B.8})$$

II Fonctions associées de Legendre de première espèce

1 Équation différentielle

L'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0, \quad (\text{B.9})$$

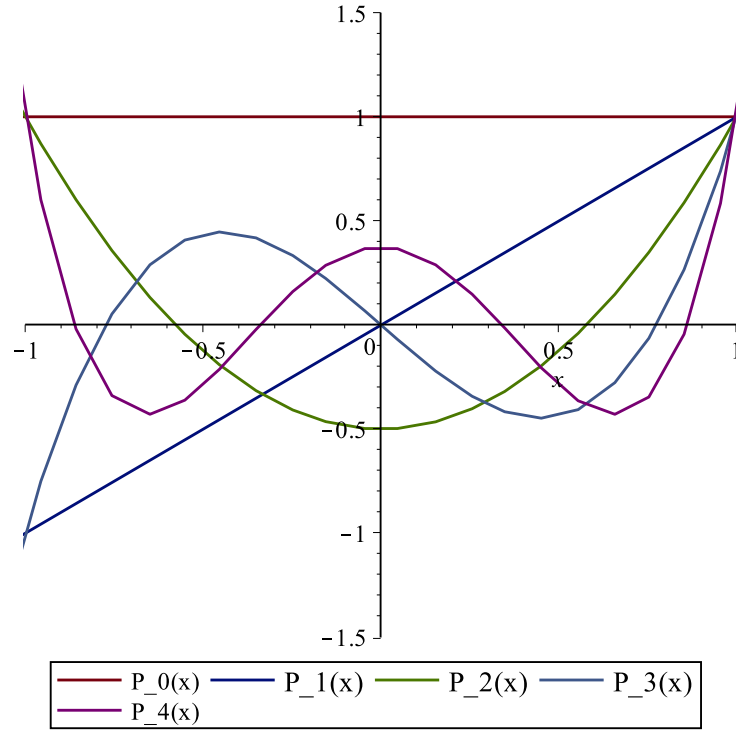


FIGURE B.1 – Représentation des polynômes de Legendre de degré $n = [0, 4]$.

a pour solution les fonctions de Legendre associées de première espèce. Ces fonctions sont définies par, avec $|m| \leq n$:

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n. \quad (\text{B.10})$$

2 Lien entre les polynômes de Legendre et les fonctions associées

Pour tout m et n ,

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad (\text{B.11})$$

donc pour $m = 0$, nous avons :

$$P_n^0(x) = P_n(x). \quad (\text{B.12})$$

3 Quelques propriétés

– Pour $m < 0$, on définit :

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_n^m(x). \quad (\text{B.13})$$

– Si $|m| > n$

$$P_n^m(x) = 0. \quad (\text{B.14})$$

- Relation de récurrence :
Pour m fixé :

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n+m)P_{n-1}^m(x) + (n+1-m)P_{n+1}^m(x). \quad (\text{B.15})$$

Pour l fixé :

$$P_n^{m+1}(x) - 2m \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^m(x) + [n(n+1) - m(m+1)] P_n^{m-1}(x) = 0. \quad (\text{B.16})$$

- Orthonormalisation :

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^m(x) \, dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{nn'}. \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

Fonctions de Bessel et transformée de Hankel

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| I | Fonctions de Bessel | 161 |
| 1 | Définition en série entière | 161 |
| 2 | Propriétés des $J_n(x)$ | 162 |
| II | Relation entre fonction de Bessel, fonction de Legendre associée et intégrale elliptique | 162 |
| III | Transformée de Hankel | 163 |

Dans cette annexe, nous donnerons la définition des fonctions de Bessel, quelques unes de leurs propriétés ainsi que leur relation avec les fonctions associées de Legendre de deuxième espèce et l'intégrale elliptique complète de première espèce. Nous donnerons également la définition de la transformée de Hankel. Ces données proviennent de plusieurs recueils (Abramowitz and Stegun, 1970; Watson, 1995)

I Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel ont été découvertes par le mathématicien Daniel Bernoulli, mais portent le nom du mathématicien Friedrich Bessel qui en développa l'analyse. Elles sont solutions de l'équation différentielle de Bessel, qui a la forme suivante :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \quad (\text{C.1})$$

où α est un nombre réel, le plus souvent entier. Dans ce cas là α est appelé l'ordre la fonction de Bessel. Ces fonctions sont aussi connues sous le nom d'harmoniques cylindriques car elles sont solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques.

1 Définition en série entière

– Pour $\alpha = n$ entier, nous avons :

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}. \quad (\text{C.2})$$

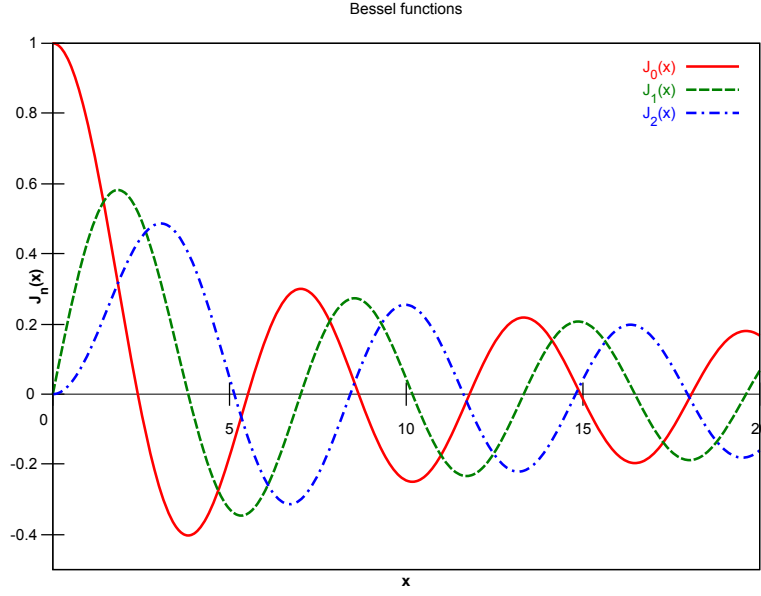


FIGURE C.1 – Représentation des fonctions de Bessel d'ordre $n = \{0, 1, 2\}$.

- Pour α non entier, cela donne :

$$J_\alpha(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(p + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\alpha}, \quad (\text{C.3})$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction gamma.

Une représentation des premiers ordres ($\alpha = 0, 1, 2$) des fonctions de Bessel est donnée sur la figure C.1.

2 Propriétés des $J_n(x)$

- Relation de récurrence :

$$J_{n+1}(x) = \frac{n J_n(x)}{x} - J'_n(x). \quad (\text{C.4})$$

- Orthogonalité :

$$\int_0^1 x J_n(kx) J_n(k'x) dx = \delta_{kk'}, \quad (\text{C.5})$$

où k, k' sont des racines distinctes de J_n .

II Relation entre fonction de Bessel, fonction de Legendre associée et intégrale elliptique

Il existe une relation liant les fonctions de Bessel aux fonctions de Legendre associées de deuxième espèce \mathcal{Q} . Cette relation, utilisée dans Cohl and Tohline (1999) et extraite de Watson (1995) donne :

$$\int_0^\infty e^{-at} J_m(bt) J_m(ct) dt = \frac{1}{\sqrt{bc}} \mathcal{Q}_{m-1/2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \right). \quad (\text{C.6})$$

Elle permet dans le cas particulier $m = 0$ d'être reliée à l'intégrale elliptique complète de première espèce \mathbf{K} (définition en Annexe A). En effet, d'après l'équation [8.13.10] de Abramowitz and Stegun (1970) :

$$\mathcal{Q}_{-1/2}(x) = \mathbf{K}\left(\frac{1-x}{2}\right). \quad (\text{C.7})$$

III Transformée de Hankel

La transformée de Hankel d'ordre n d'une fonction $f(x)$ est donnée par :

$$F_n(k) = \int_0^\infty f(x) J_n(kx) x \, dx, \quad (\text{C.8})$$

où J_n est la fonction de Bessel d'ordre n . La transformée inverse de $F_n(k)$ est donnée par :

$$f(x) = \int_0^\infty F_n(k) J_n(kx) k \, dk. \quad (\text{C.9})$$

Annexe D

Démonstration du résultat d'Ansorg *et al.* (2003)

Dans cette annexe, nous allons démontrer le résultat d'Ansorg *et al.* (2003) sur l'obtention du potentiel gravitationnel d'un disque axi-symétrique, totalement homogène, sous la forme d'une intégrale simple sur le contour.

Il nous faut trouver un vecteur \vec{W} de coordonnées cylindriques $(M, 0, N)$ tel que :

$$\frac{\partial N}{\partial a} - \frac{\partial M}{\partial z} = 2\sqrt{\frac{a}{R}}k\mathbf{K}(k), \quad (\text{D.1})$$

avec M et N qui ne dépendent que de a et de z . Dans ce cas, nous avons

$$\int_S 2\rho_0\sqrt{\frac{a}{R}}k\mathbf{K}(k) da dz = \rho_0 \oint_{\partial S} M da + N dz, \quad (\text{D.2})$$

qui est une intégrale simple. Nous pouvons poser :

$$\begin{cases} M = \zeta k\mathbf{E}(k)f(a) + \zeta k\mathbf{K}(k)g(a), \\ N = ak\mathbf{E}(k)h(a, \zeta) + ak\mathbf{K}(k)l(a, \zeta), \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

où f, g, h et l sont quatre fonctions qu'il faut déterminer. Calculons pour commencer $\frac{\partial M}{\partial z}$ et $\frac{\partial N}{\partial a}$. Pour cela, nous avons besoin de la dérivée de k en fonction de a et z

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{k}{\zeta} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right), \quad (\text{D.4a})$$

$$\frac{\partial k}{\partial a} = \frac{\zeta}{a+R} \frac{\partial k}{\partial z} - \frac{k}{2a} \left(\frac{a-R}{a+R} \right), \quad (\text{D.4b})$$

et des dérivées respectives de $k\mathbf{K}(k)$ et $k\mathbf{E}(k)$ en fonction de k données par Gradshteyn and Ryzhik (1965) :

$$\frac{d[k\mathbf{E}(k)]}{dk} = 2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k), \quad (\text{D.5a})$$

$$\frac{d[k\mathbf{K}(k)]}{dk} = \frac{\mathbf{E}(k)}{1-k^2}. \quad (\text{D.5b})$$

En utilisant ces précédentes relations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial M}{\partial z} &= k\mathbf{E}(k)f(a) + k\mathbf{K}(k)g(a) + \zeta \frac{\partial k}{\partial z} \left[(2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k))f + g \frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} \right], \\ &= k\mathbf{E}(k) \left[\left(2\frac{k^2}{m^2} - 1 \right) f - \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) \frac{g}{k'^2} \right] + k\mathbf{K}(k) \left[\left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) f + g \right], \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial a} &= k\mathbf{E}(k)(ah' + h) + k\mathbf{K}(k)(al' + l) + a \frac{\partial k}{\partial a} \left[(2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k))h + l \frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} \right], \\ &= k\mathbf{E}(k)(ah' + h) + k\mathbf{K}(k)(al' + l) + \left[(2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k))h + l \frac{\mathbf{E}(k)}{k'^2} \right] \left[-\frac{a}{a+R} \zeta \frac{\partial k}{\partial z} - \frac{k}{2} \left(\frac{a-R}{a+R} \right) \right], \\ &= k\mathbf{E}(k) \left\{ ah' + h + \left(2h + \frac{l}{k'^2} \right) \left[-\frac{a}{k(a+R)} \zeta \frac{\partial k}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{a-R}{a+R} \right) \right] \right\} \\ &\quad + k\mathbf{K}(k) \left\{ al' + l - h \left[-\frac{a}{k(a+R)} \zeta \frac{\partial k}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{a-R}{a+R} \right) \right] \right\}, \\ &= k\mathbf{E}(k) \left\{ ah' + h + \left(2h + \frac{l}{k'^2} \right) \left[\frac{a}{a+R} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a-R}{a+R} \right) \right] \right\} \\ &\quad + k\mathbf{K}(k) \left\{ al' + l - h \left[\frac{a}{a+R} \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a-R}{a+R} \right) \right] \right\}, \\ &= k\mathbf{E}(k) \left[ah' + h + \left(2h + \frac{l}{k'^2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{a+R} \frac{k^2}{m^2} \right) \right] + k\mathbf{K}(k) \left[al' + l - h \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{a+R} \frac{k^2}{m^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Si maintenant on calcule $\frac{\partial N}{\partial a} - \frac{\partial M}{\partial z}$, en regroupant les termes, nous avons pour le terme qui se multiplie à $k\mathbf{E}(k)$

$$\begin{aligned} &\left(2\frac{k^2}{m^2} - 1 \right) f - \left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) \frac{g}{k'^2} + ah' + h + \left(2h + \frac{l}{k'^2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{a+R} \frac{k^2}{m^2} \right), \\ &= 2h + ah' - f - \frac{g}{k'^2} + \frac{l}{2k'^2} + \frac{k^2}{m^2} \left(2f + \frac{g}{k'^2} - \frac{2a}{a+R} h - \frac{l}{k'^2} \frac{a}{a+R} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

et pour le terme qui se multiplie à $k\mathbf{K}(k)$

$$\left(1 - \frac{k^2}{m^2} \right) f + g + al' + l - h \left[\frac{1}{2} - \frac{a}{a+R} \frac{k^2}{m^2} \right] = f + g + l + al' - \frac{h}{2} + \frac{k^2}{m^2} \left(h \frac{a}{a+R} - f \right). \quad (\text{D.9})$$

La solution donnée par (Ansorg *et al.*, 2003) correspond à :

$$\begin{cases} M = \zeta \sqrt{\frac{a}{R}} k \mathbf{K}(k), \\ N = \sqrt{\frac{a}{R}} k \left\{ (a+R) \mathbf{K}(k) - \frac{2R}{k^2} [\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)] \right\}. \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Ces résultats sont obtenus avec les suppositions suivantes :

$$\begin{cases} f = 0, \\ g = \sqrt{\frac{a}{R}}, \\ ah = \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{2R}{k^2}, \\ al = \sqrt{\frac{a}{R}} \left(a + R - \frac{2R}{k^2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^3}{R}} - \frac{R^2 + \zeta^2}{2\sqrt{aR}}. \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Ces valeurs permettent d'éliminer le terme en $k\mathbf{E}(k)$ et de produire un facteur $2\sqrt{\frac{a}{R}}$ au terme en $k\mathbf{K}(k)$.

Table des figures

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Vue d'artiste d'un disque protoplanétaire. Crédits NASA/JPL-Caltech. . . | 13 |
| 1.2 | Schéma de la formation d'un disque. | 14 |
| 2.1 | Coordonnées sphériques. | 20 |
| 2.2 | Coquille sphérique de rayon a | 22 |
| 2.3 | Surface de Gauss interceptant le plan. | 24 |
| 2.4 | Coordonnées cylindriques. | 30 |
| 2.5 | Sphéroïde oblate (Cohl and Tohline, 1999). | 35 |
| 2.6 | Erreur entre le potentiel gravitationnel calculé numériquement via l'équation 2.86 tronquée à différents $l_0 \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et le potentiel exact du sphéroïde en fonction du rayon R : (a) à la surface de l'objet et en fonction de Z : (b) au bord externe. $l_0 = 2$ est représenté par la courbe en tiret jusqu'à $l_0 = 10$ la courbe en tiret-point. Extrait de Cohl and Tohline (1999). | 37 |
| 2.7 | Logarithme de l'erreur relative faite en calculant le potentiel gravitationnel dans le plan équatorial d'un disque infiniment mince, avec le développement multipolaire, en fonction de l . Le disque s'étale de $a_{in} = 1$ à $a_{out} = 100$. L'erreur est tracée en fonction du nombre l_0 de termes de la série pris en compte. Extrait de Pierens (2005). | 38 |
| 2.8 | Logarithme de l'erreur relative faite en calculant le potentiel gravitationnel dans le plan équatorial de disques infiniments minces de trois profils de densité différents $\Sigma \propto 1/R^\alpha$ avec $\alpha = 1, 2, 3$, avec l'équation 2.90 en fonction du rayon. Extrait de Pierens (2005). | 38 |
| 2.9 | Indicateur de stabilité $T/ W $ en fonction du carré du moment angulaire normalisé $(J^2/4\pi GM^{10/3}\bar{\rho}^{-1/3})$. Les lignes en pointillé représentent la séquence analytique des Maclaurin, des Jacobi et la séquence numérique des binaires. Les symboles P_{16}^{16} et P_{32}^{32} représentent la séquence des binaires calculée en prenant 16 termes de la série pour W et Ψ et 32 termes respectivement ; indice polytropique $n = 0$. Extrait de Hachisu (1986). | 39 |
| 3.1 | Courbe 3D représentant la fonction $\mathbf{F}(\beta, k)$ en fonction de $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $k \in [0, 1]$ | 46 |
| 3.2 | Le disque axi-symétrique (gauche) est divisé en N cylindres. Un de ces cylindres, appelé le "cylindre coïncident", contient le point de champ. Sur ce cylindre (droite), un des points source, appelé "point coïncident", coïncide avec le point de champ. En ce point là, $k = 1$ et le noyau de Green est singulier. Extrait de Huré (2005). | 46 |
| 3.3 | Variation de $k\mathbf{K}(k)$ en fonction du module k | 48 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.4 | Au dessus : schéma 3D d'un tore. En dessous : représentation de la section du tore. Adapté de Bannikova <i>et al.</i> (2011). | 49 |
| 3.5 | Variation du potentiel en fonction de ρ pour un tore circulaire de paramètre $r_0 = 0.5$, $\zeta = 0$ (courbe du dessus) et $\zeta = 0.5$ (courbe du dessous). Le potentiel de référence, calculé avec l'équation 3.22, est en trait plein et son approximation, calculée avec l'équation 3.25, est en tiret. $G = 1, R_t = 1$ et $M = 1$ pour toutes les applications numériques. Les traits verticaux représentent les bords interne et externe du tore. Extrait de Bannikova <i>et al.</i> (2011). | 50 |
| 3.6 | Variation du potentiel interne pour un tore circulaire de paramètres $r_0 = 0.1$ (courbe du dessus), $r_0 = 0.2$ (courbe du milieu), $r_0 = 0.5$ (courbe du dessous) et $\zeta = 0$. Le potentiel de référence, calculé avec l'équation 3.22, est en trait plein et son approximation, calculée avec l'équation 3.28, est en tiret. Extrait de Bannikova <i>et al.</i> (2011). | 51 |
| 3.7 | Intégrales elliptiques complètes $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{E}(k)$ et l'intégrale elliptique complète "régulière" de première espèce \mathbf{K}_{reg} définie par l'équation 3.30, en fonction de leur module k . Extrait de Huré (2005). | 52 |
| 3.8 | Erreur produite sur le calcul du potentiel gravitationnel avec les méthodes de "double splitting" (courbes du dessus) pour 3 modèles de disques définis par la table 3.1 et représentés par les schémas du milieu. L'erreur est calculée pour des résolutions verticales différentes 8, 16, 32, 64, 128 points. Les courbes du dessous représentent le potentiel calculé à l'altitude $Z = h/2$ en fonction du rayon pour les trois modèles. Extrait de Huré (2005). | 54 |
| 4.1 | Configuration typique d'un disque axi-symétrique auto-gravitant (taille et masse finies, et d'épaisseur locale $2h$) et les notations associées en coordonnées cylindriques. | 56 |
| 4.2 | Variation de $k\mathbf{K}(k)$ et $k\mathbf{E}(k)$ en fonction du module k | 60 |
| 4.3 | La fonction $\zeta\mathbf{H}(m^2, mx)$ normalisée par sa valeur en $x = 0$ en fonction de x pour différentes valeurs de $m \in [0, 1]$ | 63 |
| 4.4 | Configuration d'un tore de section carrée (cf 4.1). | 66 |
| 4.5 | Variation de la fonction GAM en fonction du rayon a (équation 4.23) pour le tore de section carrée défini par la figure 4.4 et le tableau 4.1. | 66 |
| 4.6 | Configuration d'un tore de section circulaire représenté sur la figure 4.6 et défini par le tableau 4.1). | 67 |
| 4.7 | Variation de la fonction GAM en fonction du rayon a (équation 4.23) pour le tore de section circulaire représenté à la figure 4.6 et défini par le tableau 4.1. | 67 |
| 4.8 | Configuration d'un disque de rapport d'aspect $h \sim 0.1R$. Ces caractéristiques sont définies sur la figure 4.8 et le tableau 4.1. | 68 |
| 4.9 | Variation de la fonction GAM en fonction du rayon a (équation 4.23) pour un disque dont les caractéristiques sont données par la figure 4.8 et le tableau 4.1. | 68 |
| 4.10 | Carte du potentiel normalisé d'une sphère homogène calculé avec l'équation 4.38 aux nœuds d'une grille (R, Z) régulière (33×33 nœuds, R et $Z \in [0; 1.5]$). La sphère a un rayon $R_0 = 1$. La courbe rouge en tiret représente la surface de la sphère. Les lignes représentent les iso-potentiels. | 69 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.11 | Erreur relative (en échelle logarithmique) entre le potentiel calculé avec 4.38 et avec 4.46. Les conditions sont les mêmes que celles de la figure 4.10. | 69 |
| 4.12 | A gauche : Cartes du potentiel gravitationnel de différentes configurations. A droite : Carte de l'erreur (échelle logarithmique) entre notre expression du potentiel et la référence (le splitting). Les systèmes étudiés sont le tore circulaire et l'ellipsoïde (tous totalement homogènes) dont les caractéristiques sont définies dans le tableau 4.1. Les valeurs sont calculées aux nœuds d'une grille (R, Z) régulière (33×33) nœuds). La surface de chaque système est représentée en trait plein rouge. | 70 |
| 4.13 | Variation de la fonction GAM en fonction du rayon a au point A pour le tore de section circulaire (cf tableau 4.1) défini par la figure 4.6 pour trois différents profils $\rho(z)$: le cas homogène (voir Fig.4.7), le profil parabolique et le profil Gaussien. | 72 |
| 4.14 | Variation de l'erreur relative en échelle logarithmique au point A (à l'intérieur du tore) en fonction du rayon a entre le profil homogène et le profil parabolique (tiret) et entre le profil homogène et le profil Gaussien (ligne) pour le tore de section circulaire défini par la figure 4.6 et dans le tableau 4.1. | 73 |
| 4.15 | même légende que 4.14 mais au point B. | 73 |
| 4.16 | même légende que 4.14 mais au point C. | 74 |
| 4.17 | Écart relatif (échelle logarithmique) entre les valeurs du potentiel pour un profil de densité vertical Gaussien et un profil de densité vertical homogène pour quatre systèmes différents aux nœuds d'une grille (R, Z) régulière (64×64) nœuds). En haut à gauche pour un tore de section circulaire, en haut à droite un tore de section carrée, en bas à gauche une ellipsoïde et en bas à droite un disque évasé. Toutes les caractéristiques de ces disques sont dans le tableau 4.1. | 75 |
| 4.18 | Représentation du potentiel externe en $\zeta = 0.5$, avec $r_0 = 0.5$, dû au tore homogène en fonction du rayon ρ . En trait plein, est représenté le potentiel gravitationnel via notre formule 4.38 et en pointillé celui calculé via la formule 3.25 (chapitre 3, section I-II). | 76 |
| 4.19 | Représentation de l'erreur relative en échelle logarithmique calculée avec l'équation 4.51 entre les deux potentiels (même configuration que pour la figure 4.18). | 77 |
| 4.20 | Représentation du potentiel interne dans le plan médian ($\zeta = 0$), avec $r_0 = 0.5$, dû au tore homogène en fonction du rayon ρ . En trait plein, est représenté le potentiel gravitationnel via notre formule (Eq.4.38) et en pointillé celui calculé via la formule 3.28 (chapitre 3, section I-II). Les frontières du tore sont représentées par les traits verticaux. | 78 |
| 4.21 | Représentation de l'erreur relative en échelle logarithmique entre les deux courbes de la figure 4.20. | 79 |
| 5.1 | Représentation de la fonction GAM exacte (en trait plein) et de la fonction \mathcal{G}_d (en tiret) en fonction du rayon a pour le tore de section circulaire défini par la figure 4.6 et le tableau 4.1 du chapitre 4. En rouge est tracé le pourcentage d'erreur entre les deux courbes. | 85 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 5.2 | Variation de $\mathbf{T}_1(k)$ et $\mathbf{T}_2(k)$ en fonction du module k . Ces deux fonctions divergent logarithmiquement lorsque $k \rightarrow 1$ | 88 |
| 5.3 | Différence absolue entre la fonction $\mathcal{G}(R, Z; a, z)$ calculée avec l'équation 4.23 et son approximation $\mathcal{G}_{app}(R, Z; a, z)$ en fonction du rayon a au point A (pointillé) et au point B (trait plein) pour le disque représenté à la figure 4.8. | 92 |
| 5.4 | Différence absolue entre la fonction $\mathcal{G}(R, Z; a, z)$ calculée avec l'équation 4.23 et son approximation $\mathcal{G}_{app}(R, Z; a, z)$ en fonction du rayon a au point C pour le disque représenté à la figure 4.8. | 93 |
| 5.5 | Carte représentant l'erreur relative (échelle logarithmique) entre le potentiel exact Ψ calculé avec l'équation 4.38 et le potentiel approché Ψ_{app} calculé avec l'équation 5.40 pour un disque mince de rapport d'aspect $h/a \sim 0.1$ | 93 |
| 5.6 | Même carte que la figure 5.5 mais pour un disque mince de rapport d'aspect $h/a \sim 0.3$ | 94 |
| 5.7 | Même carte que la figure 5.5 mais pour un disque mince de rapport d'aspect $h/a \sim 0.5$ | 94 |
| 6.1 | Représentation de la fonction $B(R, Z; a, z)$ en trois points du disque d'altitude $Z = h/2$: vers le milieu $R \sim 0.55$ (en trait plein), au bord interne $R \sim 0.06$ (en tiret), au bord externe $R \sim 0.98$ (en pointillé). La fonction est tracée pour le modèle de disque 1 (défini dans le tableau 6.1). | 101 |
| 6.2 | Même légende que la figure 6.1 mais pour un profil de densité qui varie en fonction du rayon selon l'équation 6.5 avec $s = 3$ | 102 |
| 6.3 | modèle de la plaque infiniment étendue. | 103 |
| 6.4 | Représentation d'un système réaliste. | 104 |
| 6.5 | Composante verticale g_z du champ d'auto-gravité, pour un disque homogène, calculée avec l'équation 6.3 comparée à l'approximation de Paczynski en fonction du rayon pour $Z = h$ (i.e à la surface du disque). Les paramètres du disque sont les suivants : $a_{in}/a_{out} = 0.05$, masse volumique $\rho = 1$ et la demi-épaisseur $h = 0.1a_{out}$ (cf modèle 1 dans la table 6.1). | 105 |
| 6.6 | Mêmes caractéristiques que la figure 6.5 mais pour $h(a) = 0.01a_{out}$ | 106 |
| 6.7 | Rapport $1/f$ défini par l'équation 6.16 pour les trois modèles de disques définis dans le tableau 6.1. Le rapport d'axe reste le même pour les trois disques $a_{in}/a_{out} = 0.05$ | 106 |
| 6.8 | Rapport $1/f$ défini par l'équation 6.16 pour le modèle de disque 3 défini dans la table 6.1 mais pour différents exposants s de la loi de puissance du profil de densité radial. $s \in [-4, 1]$. Les contours sont tous les 0.1. | 107 |
| 7.1 | Représentation de la fonction $k\mathbf{K}(k) + \ln k'$ en fonction de k et son ajustement linéaire donné par l'équation 7.1. L'erreur absolue (amplifiée d'un facteur 50) est représentée en pointillé. | 110 |
| 7.2 | Carte de l'erreur relative entre la composante verticale du champ de gravité g_z calculée via l'ajustement de 3 termes de la fonction $k\mathbf{K}(k)$, donnée par l'équation 7.1 et la référence donnée par l'équation 6.3. Les conditions sont les mêmes que pour la figure 6.8. | 111 |

| | | |
|------|--|-----|
| 7.3 | w_1 et w_2 en fonction du rayon normalisé a/a_{out} pour le modèle 2 (défini dans le tableau 6.1). Le rapport d'aspect $h(a)/a = 0.1$, $Z = \frac{3}{4}h$. Ces deux fonctions sont tracées à 3 différents endroits du disque. En haut à gauche près du bord interne, en haut à droite près du bord externe et en dessous vers le milieu du disque. | 114 |
| 7.4 | A gauche : Composante verticale g_Z du champ d'auto-gravité pour les 3 modèles (1,2,3 de bas en haut) présentés dans le tableau 6.1 en $Z = h/2$ et $a_{in}/a_{out} = 0.05$, en trait plein calculée avec l'expression "exacte" eq.6.3 et en cercle calculée avec notre approximation eq.7.11. A droite est représentée en pourcent l'erreur entre les deux courbes. | 115 |
| 7.5 | A gauche : Composante verticale g_Z du champ d'auto-gravité pour le modèle 2 présenté dans le tableau 6.1 en $Z = h/2$ et $a_{in}/a_{out} = 0.05$ pour 3 rapports d'aspect différents $h(a)/a \in \{0.5, 0.8, 1\}$, en trait plein calculée avec l'expression de référence eq.6.3 et en pointillé calculée avec notre approximation eq.7.11. A droite est représentée en pourcent l'erreur entre les deux courbes. | 116 |
| 7.6 | Carte de la précision de l'équation 7.16 pour les mêmes paramètres que le modèle 3 (cf tableau 6.1) mais pour différents exposants de la loi de puissance de la densité radiale $s \in [-4, 1]$ | 118 |
| 7.7 | Angle d'évasement $h(R)/R$ près du bord externe en fonction de R pour le modèle 1 | 119 |
| 8.1 | Représentation en grille polaire 3D d'un disque protoplanétaire. Extrait de (Müller <i>et al.</i> , 2012). | 123 |
| 8.2 | Figures d'équilibre en rotation. Extrait d'Ansorg <i>et al.</i> (2003). | 124 |
| 8.3 | Cellules à intérêt astrophysique. | 125 |
| 8.4 | Variation de M_0 en fonction de Z pour $a = R$ et $\beta_0 = \{\frac{5\pi}{12}, 0, \frac{7\pi}{12}\}$, $\alpha = 1$, donc f est inclus. | 132 |
| 8.5 | Variation de M_0 en fonction de R pour $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $Z = \{\frac{z}{2}, z, 2z\}$, $\alpha = 1$, donc f est inclus. | 132 |
| 8.6 | Variation de N_0 en fonction de Z pour $a = R$ et $\beta_0 = \{\frac{5\pi}{12}, 0, \frac{7\pi}{12}\}$, $\alpha = 0$, donc g est inclus. | 133 |
| 8.7 | Variation de N_0 en fonction de R pour $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $Z = \{\frac{z}{2}, z, 2z\}$, $\alpha = 0$, donc g est inclus. | 133 |
| 8.8 | Coupe transversale de section \mathcal{S} de la cellule cylindrique définie par la figure 8.3a. | 134 |
| 8.9 | $\Delta M(a)$ et $\Delta N(z)$ en fonction de a et de z , respectivement, au point $P(R, Z) = (2, 0)$ pour une cellule cylindrique avec les paramètres suivants : $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $z_- = -1$, $z_+ = 1$, $\theta'_1 = 0$ et $\theta'_2 = \pi/6$ | 135 |
| 8.10 | La cellule cylindrique et les trois différentes directions. | 136 |
| 8.11 | représentation du potentiel gravitationnel $\Psi(R, \theta, Z)$ par unité de masse de la cellule cylindrique (mêmes paramètres que la figure 8.9), le long des trois directions définies par la figure 8.10, calculé avec l'équation 8.39 : en fonction de $R \in [0, 4]$ pour $\theta = 0$ et $Z = 0$ (direction 1, courbe trait plein), en fonction de $R\theta \in [0, 2\pi R]$ pour $R = 2$ et $Z = 0$ (direction 2, courbe en pointillée) et en fonction de $Z \in [-2, 2]$ pour $R = 2$ et $\theta = 0$ (direction 3, courbe en tiret). Le potentiel au centre de la cellule $\Psi(2, 0, 0) \approx -5.90$. . . | 137 |

| | | |
|------|---|-----|
| 8.12 | A gauche : Carte du potentiel gravitationnel généré par une cellule cylindrique d'angle d'ouverture $\Delta\theta' = \pi/3$ (mêmes paramètres que la figure 8.9). $\mathcal{M} \approx 33.5$. A droite : même conditions qu'à gauche mais pour $\Delta\theta' = 4\pi/3$. De haut en bas (à gauche comme à droite), le potentiel est calculé aux altitudes $Z = 0$, $Z = z_+$ et $Z = 2z_+$ | 138 |
| B.1 | Représentation des polynômes de Legendre de degré $n = [0, 4]$ | 159 |
| C.1 | Représentation des fonctions de Bessel d'ordre $n = \{0, 1, 2\}$ | 162 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Avantages et inconvénients des deux approches intégrales et différentielles (équations 1.13 et 1.14) dans la détermination du potentiel gravitationnel. | 17 |
| 3.1 | Trois modèles de disques. Extrait de Huré (2005). | 54 |
| 4.1 | Configurations académiques et modèles de disques. | 65 |
| 5.1 | Erreur sur le potentiel aux points A et B pour trois modèles de disques de rapport d'aspect différents. | 95 |
| 6.1 | Trois modèles de disques, h est la demi-épaisseur et s l'exposant du profil radial en loi de puissance de la masse volumique $\rho(a) \propto a^s$. | 100 |
| 7.1 | Tableau des erreurs faites sur l'approximation pour les 3 modèles de disques définis dans le tableau 6.1. | 117 |